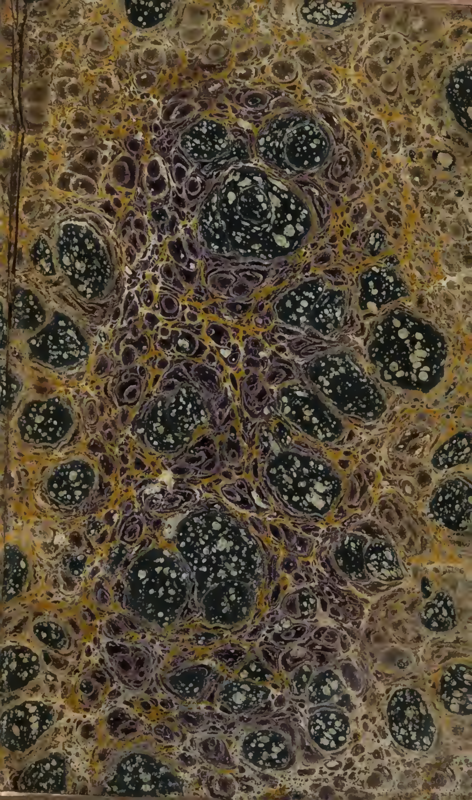

NAZIONALE
B. Prov.
XX
91
BIBLIOTECA
VITT. EM. III
NAPOLI



PETITE

ENCYCLOPÉDIE

MATHÉMATIQUE.

Tout exemplaire qui ne sera pas revêtu de la signature de l'Auteur sera réputé contrefait, et comme tel déféré aux Tribunaux.

IMPRIMERIE DE PIHAN DELAFOREST (MORINVAL),
Rue des Bons-Enfans, n°. 34.

PETITE ENCYCLOPÉDIE MATHÉMATIQUE,

A L'USAGE DES DEUX SEXES,

Contenant un Traité :

1°. d'Arithmétique; 2°. d'Algèbre; 3°. de Géométrie; 4°. de Trigonométrie rectiligne et sphérique; 5°. de Sphère; 6°. de Mécanique; 7°. de Physique; 8°. de Chimie, et divers fragmens de sciences qui ont un rapport plus ou moins immédiat avec les mathématiques;

Par M. PEYROT,

Professeur de Mathématiques et de Langues anciennes et modernes.

Ouvrage approuvé par S. Exc. le Ministre de l'Instruction publique.

Cet Ouvrage renferme au-delà de ce qui est nécessaire pour être admis à l'École Polytechnique, et convient à tous les Jeunes Gens qui se destinent à la Marine, au Génie, aux Ponts-et-Chaussées, au Cadastre, aux Mines, à l'Architecture, à la Banque, au Commerce, etc.

TOME III.

A PARIS,

Chez
L'AUTEUR, rue Neuve-de-Luxembourg, n°. 15;
Anthelme BOUCHER, rue des Bons-Enfans, n°. 34;
DELAFOREST, Libraire, Place de la Bourse, rue des Filles-Saint-Thomas, n°. 7;
J.-J. RISLER, Libraire, rue de l'Oratoire, n°. 6;
BACHELIER, Libraire, quai des Augustins, n°. 55;
BÉCHET, Libraire, quai des Augustins, n°s. 57 et 59.

1830.



PETITE

ENCYCLOPÉDIE

MATHÉMATIQUE.



SUITE

DU

TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE.

1. Nous avons prouvé (Tom. II, §. 559) que deux rectangles de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases. Il reste à prouver que

2. *Deux rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.*

Lorsqu'on considère deux rectangles de même base, quel est le second rapport d'une proportion dont le premier a pour termes ces deux rectangles?

En effet, un rectangle quelconque peut se représenter par deux facteurs, dont l'un est sa base, et l'autre sa hauteur (Tom. II, §. 557).

Nommons x l'un des deux rectangles, et l'autre y.

Soit h la hauteur du rectangle x; soit h' celle de y, et b la base commune.

Nous aurons la proportion

$$x:y::h\times b:h'\times b.$$

Divisant les deux termes du second rapport

par b, ce qui (Tom. Ier., §. 371) ne change pas la raison de la proportion, il en résulte

$$x : y :: h : h'.$$

Donc le rectangle x, qui a pour base b, est au rectangle y, dont la base est la même, comme la hauteur h du rectangle x est à la hauteur h' du rectangle y.

Ce qu'il fallait démontrer.

Quelle est la mesure de la surface d'un parallélogramme quelconque?

3. *La surface d'un parallélogramme quelconque est égale au produit de sa base par sa hauteur.*

Car un parallélogramme est égal à un rectangle de même base et de même hauteur (Tom. II, §. 549). Or, la surface d'un rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur (Tom. II, §. 557).

Ce qu'il fallait démontrer.

Lorsqu'on considère deux parallélogrammes qui ont même base, quel est le second rapport d'une proportion dont le premier a pour termes ces deux parallélogrammes?

4. *Deux parallélogrammes de même base sont entr'eux comme leurs hauteurs.*

Car, puisque la surface d'un parallélogramme quelconque est égale au produit de sa base par sa hauteur (§. 3), nous pouvons représenter chacun de ces parallélogrammes par deux facteurs, dont l'un soit la hauteur, et l'autre la base.

Nommons x l'un des deux parallélogrammes, et l'autre y.

Soit h la hauteur du parallélogramme x; soit h' celle de y, et b la base commune.

Nous obtiendrons la proportion

$$x : y :: h \times b : h' \times b.$$

Divisant les deux termes du second rapport par b, ce qui (Tome Ier., §. 371) ne change pas la raison de la proportion, on trouve

$$x : y :: h : h'.$$

Donc, le parallélogramme x, qui a pour base b, est au parallélogramme y, dont la base est la même, comme la hauteur h du rectangle x est à la hauteur h' du rectangle y.

Ce qu'il fallait démontrer.

5. *Deux parallélogrammes de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases.*

Lorsqu'on considère deux parallélogrammes de même hauteur, quel est le second rapport d'une proportion dont le premier a pour termes ces deux parallélogrammes?

En effet, on vient de voir que la surface d'un parallélogramme quelconque est égale au produit de sa base par sa hauteur. Représentons encore chacun de ces parallélogrammes par deux facteurs, dont l'un soit la base et l'autre la hauteur.

Nous nommerons x l'un des deux parallélogrammes, et l'autre y.

b sera la base du parallélogramme x, b' celle de y, et h la hauteur commune.

Il en résultera la proportion

$$x : y :: h \times b : h \times b'.$$

Divisant les deux termes du second rapport par h, ce qui (Tom. Ier., §. 371) ne change pas la raison de la proportion, on obtient

$$x : y :: b : b'.$$

Donc le parallélogramme x, qui a pour hauteur h, est au parallélogramme y, dont la hau-

teur est la même, comme la base b du rectangle x est à la base b' du rectangle y.

Ce qu'il fallait démontrer.

Quelle est la mesure de la surface d'un triangle ?

6. *La surface d'un triangle est égale au produit de sa base par la moitié de sa hauteur.*

Car nous avons vu (Tom. II, §. 551) que la surface d'un triangle est égale à la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur.

Supposons donc que nous ayons un parallélogramme de même base et de même hauteur que le triangle dont il s'agit; ce parallélogramme sera égal au produit de sa base par sa hauteur (§. 3). Donc le triangle, qui n'est que la moitié de ce parallélogramme, est égal au produit de sa base par la moitié de sa hauteur.

Lorsqu'on considère deux triangles de même hauteur, quel est le second rapport d'une proportion dont le premier a pour termes ces deux triangles ?

7. *Deux triangles de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases.*

Car tous les triangles de même base et de même hauteur sont égaux (Tom. II, §. 553). Or, un triangle est égal au produit de sa base par la moitié de sa hauteur (§ 6).

Nommons x l'un des deux triangles, et l'autre y.

Soit b la base du triangle x, soit b' celle de y, et h la hauteur commune.

Nous aurons la proportion

$$x : y :: b \times 1/2\, h : b' \times 1/2\, h.$$

Multipliant les deux termes du second rapport par 2, ce qui (Tom. Ier., §. 369) ne change pas

la raison de la proportion, et revient à supprimer le facteur $\overline{1/2\ h}$, il en résulte

$$x : y :: b : b'.$$

Donc le triangle x, qui a pour hauteur h, est au triangle y, dont la hauteur est la même, comme la base b du triangle x est à la base b' du triangle y.

Ce qu'il fallait démontrer.

8. *Deux triangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.*

Lorsqu'on considère deux triangles de même base, quel est le second rapport d'une proportion dont le premier a pour termes ces deux triangles ?

N'oublions pas que tous les triangles de même base et de même hauteur sont égaux (Tom. II, §. 553), et qu'un triangle est égal au produit de sa base par la moitié de sa hauteur (§. 6).

Cela posé, appelons de nouveau x l'un des deux triangles, et l'autre y.

Soit h la hauteur du triangle x; soit h' celle de y, et b la base commune.

Nous obtiendrons la proportion

$$x : y :: \overline{1/2\ h} \times b : \overline{1/2\ h'} \times b \ (\alpha).$$

Mais $\overline{1/2\ h} \times b$ est équivalent à $\overline{1/2\ b} \times h$.

Et $\overline{1/2\ h'} \times b$ à $\overline{1/2\ b} \times h'$.

A la proportion (α) on pourra donc substituer celle-ci :

$$x : y :: \overline{1/2\ b} \times h : \overline{1/2\ b} \times h' \ (\beta).$$

Multipliant les deux termes du second rapport par 2, ce qui (Tom. Ier., §. 369) ne change pas la raison de la proportion, et revient à supprimer le facteur $\overline{1/2\ b}$, on obtient

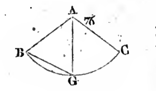
$$x : y :: h : h'.$$

Donc le triangle x, qui a pour base b, est au triangle y, dont la base est la même, comme la hauteur h du triangle x est à la hauteur h' du triangle y.

Ce qu'il fallait démontrer.

Dans le même cercle, ou dans des cercles égaux, quel arc les angles égaux, dont le sommet est au centre, interceptent-ils sur la circonférence ?

9. *Dans le même cercle, ou dans des cercles égaux, les angles égaux dont le sommet est au centre interceptent sur la circonférence des arcs égaux.*





Soient décrits avec le même rayon les arcs BGC (fig. 76) et EF (fig. 77). Soient les angles au centre BAG, EDF égaux entr'eux : je dis que les arcs BG, EF sont égaux.

Car, puisque ces angles supposés égaux ont les côtés égaux comme étant les rayons d'un même cercle, si l'on place le côté AB sur le côté DE de manière que le point A tombe sur le point D, le point B tombera sur le point E ; et comme l'angle BAG est, par hypothèse, égal à l'angle EDF, le côté AG prendra la direction de DF, et le point G tombera sur le point F. Les extrémités des arcs BG, EF seront donc communes, et par conséquent ces deux arcs coïncideront l'un avec l'autre dans toute leur étendue ; sans cela ces arcs auraient des points inégalement

éloignés du centre, ce qui est contre l'hypothèse. Donc ces arcs sont égaux.

Ce qu'il fallait démontrer.

10. Réciproquement, *dans le même cercle ou dans des cercles égaux, si deux arcs sont égaux, ils répondent à des angles au centre égaux.*

Dans le même cercle, ou dans des cercles égaux, si deux arcs sont égaux, à quels angles au centre répondent-ils ?

Soient les mêmes figures 76 et 77 décrites avec le même rayon. Soit l'arc BG égal à l'arc EF, Je dis que les angles BAG, EDF sont égaux.

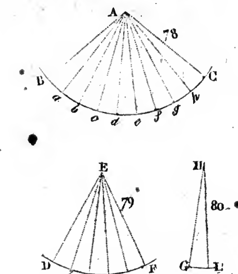
Car, puisque, par hypothèse, les arcs BG, EF sont égaux, les cordes BG, EF qui les soustendent sont égales (Tom. II, §. 610).

Maintenant, si l'angle BAG n'est pas égal à l'angle EDF, il est plus grand ou plus petit. Si l'angle BAG est plus grand que l'angle EDF, les côtés AB, AG étant égaux aux côtés DE, DF, le troisième côté BG du triangle ABG sera plus grand que le troisième côté EF du triangle DEF (Tom. II, §. 519), ce qui est contre l'hypothèse. Si l'angle BAG est plus petit que l'angle EDF, les côtés AB, AG, étant égaux aux côtés DE, DF, le troisième côté BG du triangle ABG sera plus petit que le troisième côté EF du triangle DEF (Tom. II, §. 519), ce qui est encore contre l'hypothèse. Donc l'angle BAG ne peut être ni plus grand ni plus petit que l'angle EDF; donc il lui est égal.

Ce qu'il fallait démontrer.

11. *Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, si deux angles au centre sont entr'eux comme deux nombres entiers, les arcs interceptés sont entr'eux comme les mêmes nombres.*

Dans le même cercle, ou dans des cercles égaux, si deux angles au centre sont entr'eux comme deux nombres entiers, comment sont entr'eux les arcs interceptés ?



Supposons que l'angle GHI (fig. 80), pris pour commune mesure, soit contenu 9 fois exactement dans l'angle BAC (fig. 78) et 5 fois dans l'angle DEF (fig. 79), en sorte que l'on ait cette proportion :

ang. BAC : ang. DEF : : 9 : 5.

Je dis qu'il en résultera cette proportion :

arc BC : arc DF : : 9 : 5.

En effet, les 9 angles BA*a*, *a*A*b*, *b*A*c*, *c*A*d*, *d*A*e*, *e*A*f*, *f*A*g*, *g*A*h*, *h*AC (fig. 78) que nous avons faits égaux à l'angle GHI, et les 5 angles DE*i*, *i*E*k*, *k*E*l*, *l*E*m*, *m*EF (fig. 79) que nous avons faits de même grandeur que ceux ci-dessus, interceptent sur la circonférence les arcs partiels B*a*, *ab*, etc., de la figure 78, et D*i*,

ik, etc., de la fig. 79. Donc ces arcs sont égaux (§. 9). Donc il est bien vrai que

arc BC : arc DF :: 9 : 5.

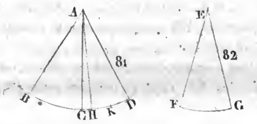
Ce qu'il fallait démontrer.

12. Corollaire. *Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, si deux arcs sont entr'eux comme deux nombres entiers, les angles au centre auxquels ils répondent sont entr'eux comme les mêmes nombres.*

Dans le même cercle, ou dans des cercles égaux, si deux arcs sont entre eux comme deux nombres entiers, comment sont entre eux les angles au centre auxquels ils répondent ?

13. *Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, quel que soit le rapport de deux angles au centre, ils seront toujours entr'eux comme les arcs interceptés entre leurs côtés.*

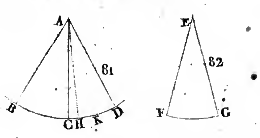
Dans le même cercle, ou dans des cercles égaux, quel que soit le rapport de deux angles au centre, avec quel autre rapport ces deux angles formeront-ils une proportion ?



Soient les angles au centre BAD (fig. 81) et FEG (fig. 82), dont les côtés sont le rayon d'un même cercle. Plaçons le plus petit FEG dans le plus grand BAD, de manière que le plus petit devienne BAC. Je dis que l'on aura cette proportion :

angle BAD : angle BAC : : arc BD : arc BC (α).

Car, si cette proportion n'est pas vraie, comme les trois premiers termes d'une proportion quelconque ne peuvent jamais être faux, le quatrième terme sera plus grand ou plus petit que



arc BC. Supposons qu'il soit plus grand, et représentons-le par BK; nous aurons alors :

angle BAD : angle BAC : : arc BD : arc BK (β).

Maintenant il est permis de supposer que l'arc BD soit partagé en parties égales, plus petites que CK. Il y aura au moins un point de division entre C et K. Soit H ce point, et joignons AH. Les arcs BD, BH, qui contiendront chacun un certain nombre de ces parties égales, seront entr'eux comme deux nombres entiers, et en vertu des §§. 11 et 12 on aura cette proportion :

angle BAD : angle BAH : : arc BD : arc BH (γ).

Par la proportion (β) nous avons *alternando* (Tom. Ier., §. 360),

angle BAD : arc BD : : angle BAC : arc BK (δ).

De la proportion (γ) nous tirons *alternando* (Tom. Ier., §. 360),

angle BAD : arc BD : : angle BAH : arc BH (ϵ).

Les proportions (δ) et (ϵ) ayant le rapport commun angle BAD : arc BD, il en résulte cette nouvelle proportion :

angle BAC : arc BK : : angle BAH : arc BH (ζ).

ou, *alternando* (Tom. Ier., §. 360),

angle BAC : angle BAH : : arc BK : arc BH (n).

Mais l'angle BAC est plus petit que l'angle BAH; il faudrait donc, pour que la proportion fût vraie, que l'arc BK fût plus petit que l'arc BH; or, au contraire, il est plus grand. Donc, l'hypothèse d'où nous sommes parti est absurde. Donc il est impossible que le quatrième terme soit un arc plus grand que BC. On prouverait de la même manière qu'il ne peut être plus petit. Donc ce quatrième terme est nécessairement l'arc BC. Donc on a la proportion

angle BAD : angle BAC : : arc BD : arc BC.

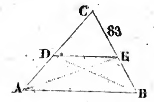
Ce qu'il fallait démontrer.

14. COROLLAIRE. *Deux secteurs pris dans le même cercle ou dans des cercles égaux, sont entr'eux comme les arcs qui leur servent de base.*

Avec quels termes deux secteurs, pris dans le même cercle ou dans des cercles égaux, forment-ils une proportion ?

15. *Si l'on coupe les deux côtés d'un triangle qui comprennent l'angle vertical par une droite parallèle à la base, les quatre sections de ces deux côtés formeront une proportion, c'est-à-dire que chaque côté contiendra l'antécédent et le conséquent d'un des deux rapports.*

Si l'on coupe les deux côtés d'un triangle qui comprennent l'angle vertical par une droite parallèle à la base, quels seront les termes du second rapport d'une proportion dont les termes du premier rapport sont les sections de l'un des côtés de l'angle vertical ?



Soit le triangle ACB (fig. 83), soit tirée la ligne DE parallèlement à la base AB. Je dis que l'on a cette proportion :

CD : AD :: CE : BE.

Joignons AE et BD. Les deux triangles ADE, BDE, ont même base DE. Ils ont aussi même hauteur, puisque leurs sommets A et B sont situés sur une parallèle à la base; donc ils sont égaux (Tom. II, §. 553).

Les triangles CDE, ADE, dont le sommet commun est E, et dont les bases CD, AD sont sur une même ligne droite, ont par cette raison même hauteur : ils sont donc entr'eux comme leurs bases (§. 7), et l'on a cette proportion :

CDE : ADE :: CD : AD (α).

Les triangles CDE, DBE, dont le sommet commun est D, et dont les bases CE, BE, sont sur une même ligne droite, ont par-là même hauteur : ils sont donc entr'eux comme leurs bases (§. 7), et il en résulte cette proportion :

CDE : DBE :: CE : BE (β).

Mais nous venons de voir que les triangles ADE, DBE sont égaux. Donc on peut substituer

ADE à DBE, et par conséquent la proportion (β) deviendra

$$CDE : ADE :: CE : BE \ (\gamma).$$

Les termes du premier rapport des proportions (α) et (γ) étant identiques, il en naîtra cette nouvelle proportion (Tom. II, §. 1) :

$$CD : AD :: CE : BE \ (\delta).$$

Ce qu'il fallait démontrer.

16. Corollaire. *Si l'on coupe les deux côtés d'un triangle qui comprennent l'angle vertical par une droite parallèle à la base, les deux côtés seront entr'eux comme la section supérieure du premier est à la section supérieure du second, ou comme la section inférieure du premier est à la section inférieure du second.*

Si l'on coupe les deux côtés d'un triangle qui comprennent l'angle vertical par une droite parallèle à la base, quels seront les termes du second rapport d'une proportion dont les termes du premier rapport sont les deux côtés de l'angle vertical ?

Car, soit la même figure 83, et reprenons la proportion (δ) du paragraphe précédent. En vertu du §. 377 (Tom. Ier.), nous aurons, *addendo-invertendo*,

$$CD+AD : CD :: CE+BE : CE \ (\varepsilon).$$

Or, $CD+AD=AC$, et $CE+BE=BC$.

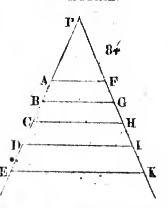
Cette même proportion (δ) nous fournit encore, en vertu du §. 376 (Tom. Ier.), *addendo*,

$$CD+AD : AD :: CE+BE : BE \ (\zeta).$$

Ce qu'il fallait démontrer.

17. *Si entre deux droites on mène tant de parallèles qu'on voudra, ces droites seront coupées proportionnellement par ces parallèles.*

Si entre deux droites on mène tant de parallèles qu'on voudra, comment ces droites seront-elles coupées ?



Soient (fig. 84) AE, FK les droites proposées, et prolongeons-les jusqu'à leur point de rencontre P.

Soient menées les parallèles AF, BG, CH, DI, EK;

Je dis que l'on aura

AB : FG : : BC : GH : : CD : HI : : DE : IK.

En effet, dans le triangle BPG, AF est menée parallèlement à la base BG. On aura donc, conformément à la proportion (ζ) du §. 16 :

BP : AB : : GP : FG (η),

ou bien, *alternando* (Tom. Ier., §. 360),

BP : GP : : AB : FG (θ).

Dans le triangle CPH, BG est menée parallèlement à la base CH; ce qui donnera, conformément à la proportion (δ) du §. 15,

BP : BC : : GP : GH (ι).

ou, *alternando* (Tom. Ier., §. 360),

BP : GP : : BC : GH (κ).

Les termes du premier rapport des propor-

tions (θ) et ($\varkappa$) étant identiques, donnent lieu à cette nouvelle proportion (Tom. II, §. 1):

$$AB : FG :: BC : GH \ (\lambda).$$

Dans le triangle DPI, CH est menée parallèlement à la base DI, ce qui donnera, selon la proportion (δ) du §. 15:

$$CP : CD :: HP : HI \ (\mu),$$

ou, *alternando* (Tom. Ier., §. 360),

$$CP : HP :: CD : HI \ (\nu).$$

Mais en considérant le triangle CPH, on a, en vertu de la proportion (ζ) du §. 16:

$$CP : BC :: HP : GH \ (\xi),$$

ou, *alternando* (Tom. Ier., §. 360),

$$CP : HP :: BC : GH \ (o).$$

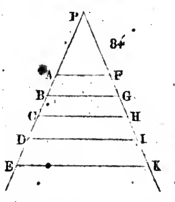
Les termes du premier rapport des proportions (ν) et (o) étant identiques, il en résulte cette nouvelle proportion (Tom. II, §. 1):

$$CD : HI :: BC : GH \ (\pi).$$

Mais nous avons vu (proportion λ) que le rapport BC : GH est égal au rapport AB : FG; et puisque dans la proportion (π) le rapport BC : GH est aussi égal au rapport CD : HI, il s'ensuit (Tom. II, §. 1) que les trois rapports BC : GH, AB : FG, CD : HI, sont égaux, et qu'ainsi l'on a

$$AB : FG :: BC : GH :: CD : HI \ (\rho).$$

Dans le triangle EPK, DI est menée parallè-



lement à la base EK, ce qui donne, selon la proportion (δ) du §. 15,

DP : DE : : IP : IK (σ),

ou, *alternando* (Tom. Ier., §. 360),

DP : IP : : DE : IK (τ),

Mais, en considérant le triangle DPI, on a, en vertu de la proportion (ζ) du §. 16,

DP : CD : : IP : : HI (φ),

ou, *alternando* (Tom. Ier., §. 360),

DP : IP : : CD : HI (χ),

Les termes du premier rapport des proportions (τ) et (χ) étant identiques, il en résulte cette nouvelle proportion (Tom. II, §. 1):

DE : IK : : CD : HI (ψ).

Mais nous avons vu (proportion ρ) que les rapports AB : FG, BC : GH, sont tous égaux au rapport CD : HI; et puisque dans la proportion (ψ) le rapport DE : IK est aussi égal au rapport CD : HI, il s'ensuit (Tom. II, §. 1), que les quatre rapports AB : FG, BC : GH,

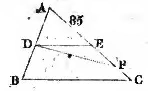
CD : HI, DE : IK, sont égaux, et qu'ainsi l'on a

AB : FG : : BC : GH : : CD : HI : : DE : IK.

Ce qu'il fallait démontrer.

18. *Réciproquement, si les côtés d'un triangle qui comprennent l'angle vertical sont coupés proportionnellement par une droite qui joigne ces deux côtés, cette droite sera parallèle à la base du triangle.*

Si les côtés d'un triangle qui comprennent l'angle vertical sont coupés proportionnellement par une droite qui joigne ces deux côtés, que sera cette droite?



Soit (fig. 85) le triangle ABC, et soit menée la ligne DE, de manière qu'on ait cette proportion :

AD : BD : : AE : EC (α).

Je dis que la ligne DE est parallèle à la base BC.

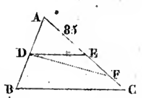
Car si la ligne DE n'est pas parallèle à la base BC, soit toute autre ligne parallèle à cette base, par exemple DF.

Nous aurons alors, en vertu du principe du §. 15, cette proportion :

AD : BD : : AF : CF (β).

Les termes du premier rapport des proportions (α) et (β) étant identiques, on obtient cette nouvelle proportion (Tom. II, §. 1) :

AE : EC : : AF : CF (γ).



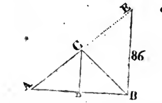
Mais dans la proportion (7), l'antécédent AE est plus petit que l'antécédent AF. Il faudrait donc, pour que la proportion fût vraie, que le conséquent EC fût plus petit que le conséquent EF; or, au contraire il est plus grand : donc l'hypothèse de laquelle nous sommes parti est absurde.

Donc il est bien vrai que la ligne DE est parallèle à la base BC.

Ce qu'il fallait démontrer.

La ligne droite qui partage en deux parties égales l'angle vertical d'un triangle, comment divise-t-elle la base ?

19. Corollaire. *La ligne droitè qui partage en deux parties égales l'angle vertical d'un triangle divisera la base qu'elle rencontre en deux parties proportionnelles aux côtés adjacens à ces parties.*



Soit (fig. 86) le triangle ACB. Partageons l'angle ACB en deux parties égales par la ligne CD.

Je dis que l'on aura cette proportion:

$$AC : AD :: BC : BD \quad (\alpha).$$

En effet, prolongeons le côté AC d'une quantité CE égale à BC, et joignons BE. Le triangle BCE est ainsi isoscèle par l'égalité des côtés BC, CE, et l'angle BCE, extérieur par rapport au triangle ACB (Tom. II, §. 531), est supplément (1) de l'angle ACB (Tom. II, §. 509). Mais puisque le triangle BCE est isoscèle par les côtés BC, CE, les angles CBE, BEC sont égaux, et par conséquent l'angle CBE est égal au demi-supplément de l'angle BCE. Donc l'angle BCD qui, par hypothèse, est égal à la moitié de l'angle ACB, est égal à l'angle CBE. Mais les angles BCD, CBE, que nous venons de voir égaux, sont alternes-internes. Donc (Tom. II, §. 522), les lignes CD, EB, sont parallèles; donc (§. 15) l'on a cette proportion:

$$AC : CE :: AD : BD \ (\beta).$$

Mais CE est, par construction, égal à BC. Donc

$$AC : BC :: AD : BD \ (\gamma),$$

(1) Le *supplément* d'un angle ou d'un arc en grades, est ce qui reste lorsqu'on a retranché cet angle ou cet arc de 200 grades. — Qu'entend-on par supplément d'un angle ou d'un arc en grades ?

Le *supplément* d'un angle ou d'un arc en degrés est ce qui reste lorsqu'on a retranché cet angle ou cet arc de 180 degrés. — Qu'entend-on par supplément d'un angle ou d'un arc en degrés ?

On appelle *complément* d'un angle ou d'un arc en grades, ce qui reste après qu'on a retranché cet angle ou cet arc de 100 grades. — Qu'est-ce que le complément d'un angle ou d'un arc en grades ?

On nomme *complément* d'un angle ou d'un arc en degrés, ce qui reste lorsqu'on a retranché cet angle ou cet arc de 90 degrés. — Qu'est-ce que le complément d'un angle ou d'un arc en degrés ?

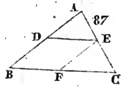
ou, *alternando* (Tome Ier., §. 360),

$$AC : AD :: BC : BD\ (\delta).$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Si l'on coupe les deux côtés d'un triangle qui comprennent l'angle vertical par une droite parallèle à la base, quels seront les termes du second rapport d'une proportion dont les termes du premier rapport sont cette droite et la base ?

20. *Si l'on coupe les deux côtés d'un triangle qui comprennent l'angle vertical par une droite parallèle à la base, le rapport de cette droite à la base sera le même que celui de la section supérieure de l'un ou l'autre des deux côtés de l'angle vertical à ce même côté.*



Soit (fig. 87) le triangle ABC. Soit DE parallèle à BC. Je dis que l'on a celte proportion :

$$DE : BC :: AD : AB :: AE : AC\ (\alpha).$$

Ce qui signifie aussi que les trois côtés du triangle formé par la parallèle à la base sont les antécédens, et que les trois côtés du triangle proposé sont les conséquens de trois rapports égaux; ou, en d'autres termes, que les trois côtés du petit triangle sont proportionnels aux trois côtés du plus grand.

Pour démontrer cette proposition, soit menée la parallèle EF au côté AB. La figure BDEF sera un parallélogramme d'où résulte DE=BF.

Mais puisque EF est parallèle à AB, il s'ensuit (§. 16) que l'on a cette proportion :

BC : AC :: BF : AE (β);

ou, *alternando* (Tome I[er]., §. 360),

BC : BF :: AC : AE (γ).

Mais nous avons, par construction, DE=BF;

Donc

BC : DE :: AC : AE (δ),

ou, *invertendo* (Tome I[er]., §. 362),

DE : BC :: AE : AC (ϵ).

Mais le rapport AE : AC est égal (§. 16) au rapport AD : AB;

Donc enfin

DE : BC :: AD : AB :: AE : AC (ζ).

Ce qu'il fallait démontrer.

21. *On appelle* TRIANGLES SEMBLABLES *ceux qui ont les angles homologues* (1) *égaux, et les côtés homologues proportionnels.* Qu'entend-on par triangles semblables ?

22. *Les* ANGLES HOMOLOGUES *sont ceux qui, dans les triangles semblables, sont placés de la même manière, en partant d'un endroit correspondant de ces triangles, et en en faisant le tour.* Qu'entend-on par angles homologues ?

23. *Les* CÔTÉS HOMOLOGUES *des triangles semblables sont ceux qui comprennent les angles homologues.* Quels sont les côtés homologues des triangles semblables ?

(1) Ce terme vient du mot grec *omologos*, qui signifie *correspondant.*

24. *Les triangles identiques sont en même temps des triangles semblables.*

Deux ou plusieurs triangles peuvent-ils avoir les angles homologues égaux sans avoir en même temps les côtés homologues proportionnels ?

25. *Deux ou plusieurs triangles ne peuvent avoir les angles homologues égaux sans avoir en même temps les côtés homologues proportionnels, et être par conséquent semblables.*

Qu'appelle-t-on polygones semblables ?

26. *Lorsque les polygones de plus de trois côtés sont tels que les côtés consécutifs de l'un pris un à un sont proportionnels aux côtés consécutifs de l'autre pris aussi un à un, de manière que chaque antécédent d'une suite de rapports égaux soit pris dans l'une des deux figures, et chaque conséquent dans l'autre de ces deux figures, et que les angles compris par ces côtés sont respectivement égaux, ils s'appellent* SEMBLABLES, *et les termes de chaque rapport* CÔTÉS HOMOLOGUES.

Les polygones de plus de trois côtés sont-ils nécessairement semblables lorsqu'ils ont les angles égaux chacun à chacun, ou les côtés homologues proportionnels ?

27. *Les polygones qui ne sont pas des triangles doivent nécessairement, pour être semblables, avoir un même nombre de côtés; mais ne sont pas semblables tous les polygones qui, ayant un même nombre de côtés, ont les angles égaux chacun à chacun, ni ceux qui, ayant aussi un même nombre de côtés, ont ces côtés proportionnels chacun à chacun.*

Quelle différence remarque-t-on entre les triangles et les polygones de plus de trois côtés, pour les conditions qui rendent ces figures semblables ?

En un mot, dans les polygones de plus de trois côtés, l'égalité des angles n'entraîne pas la proportionnalité des côtés, et la proportionnalité des côtés n'entraîne pas l'égalité des angles, tandis que dans les triangles l'un entraîne l'autre.

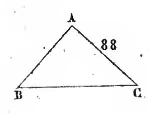
28. *Dans les triangles semblables les côtés homologues sont non seulement les côtés qui comprennent les angles égaux, mais encore les côtés opposés aux angles égaux, chacun à chacun, en suivant la figure dans le même sens; et ces côtés sont absolument les mêmes.*

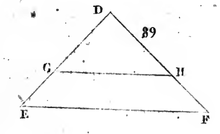
Quelle différence y a-t-il entre la manière de considérer les côtés homologues dans les triangles semblables et celle de les considérer dans les polygones semblables de plus de trois côtés?

29. *Mais dans les polygones de plus de trois côtés on ne peut reconnaître les côtés homologues qu'en les considérant comme les jambes des angles homologues.*

30. *Deux triangles sont semblables* (1) *lorsque les trois côtés consécutifs de l'un sont les antécédens, et que les trois côtés consécutifs de l'autre sont les conséquens de trois rapports égaux, c'est-à-dire que deux triangles sont semblables quand ils ont les côtés homologues proportionnels.*

Lorsque l'on considère deux triangles, et que les trois côtés consécutifs de l'un sont les antécédens et les trois côtés consécutifs de l'autre les conséquens de plusieurs rapports égaux, que sont ces deux triangles?

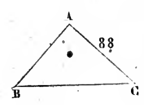


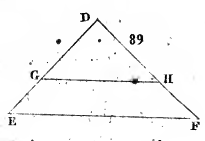


Soient (fig. 88) le triangle ABC, et (fig. 89) le triangle DEF; et supposons que l'on ait cette suite de rapports égaux

$$AB : DE :: BC : EF :: AC : DF\ (\alpha).$$

(1) Voir la définition du §. 21.





Je dis que l'on a

Ang. C (opposé au côté AB)=ang. DFE (opposé au côté DE),
Ang. A (opposé au côté BC)=ang. D (opposé au côté EF),
Ang. B (opposé au côté AC)=ang. DEF (opposé au côté DF),

et que par conséquent ces deux triangles sont semblables.

Car puisque, par hypothèse, nous avons cette proportion :

$$AB : DE :: AC : DF \ (\beta);$$

Si nous prenons sur DE une portion DG=AB, et sur DF une portion DH=AC, et que nous joignions GH, nous obtiendrons, en substituant à AB son égale DG, et à AC son égale DH,

$$DG : DE :: DH : DF \ (\gamma).$$

Donc les côtés DE, DF du triangle DEF sont coupés proportionnellement aux points G et H. Donc (§. 18) la ligne GH est parallèle à la base EF.

L'on a aussi, en vertu du §. 20,

$$GH : EF :: DG : DE \ (\delta),$$

ou, *invertendo* (Tom. Ier., §. 362),

$$EF : GH :: DE : DG \ (\iota).$$

Mais on a par hypothèse

BC : EF : : AB : DE (ζ),

ou, *invertendo* (Tom. Ier., §. 362),

EF : BC : : DE : AB (η).

La proportion (ε) donne, *alternando* (Tom. Ier., §. 360),

EF : DE : : GH : DG (θ).

La proportion (η) donne aussi, suivant la même loi,

EF : DE : : BC : AB (ι).

Les deux termes du premier rapport des proportions (θ) et (ι) étant identiques, il en résulte (Tom. II, §. 1):

GH : DG : : BC : AB ($\varkappa$).

Mais DG est, par construction, égal à AB. Or, DG et AB ne sont autre chose que les dénominateurs de deux fractions égales (Tom. Ier., §. 345). Mais, puisque les dénominateurs sont égaux, les numérateurs doivent l'être aussi. Donc GH=BC. Donc les deux triangles ABC, DGH sont identiques (Tom. II, §. 508).

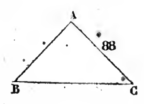
D'autre part, l'angle DGH du triangle DGH et l'angle DEF du triangle DEF sont égaux comme internes-externes (Tom. II, §. 524). L'angle DHG du triangle DGH est égal à l'angle DFE du triangle DEF par la même raison. Donc les deux triangles DGH, DEF ont deux angles égaux chacun à chacun; donc le troisième, qui dans ce cas est d'ailleurs commun, est égal au troisième. Donc les triangles DGH, DEF sont équiangles.

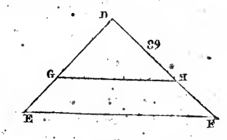
Mais nous venons de voir que les triangles ABC, DGH sont identiques ; donc les triangles ABC, DEF sont équiangles ; et, comme leurs côtés homologues sont, par hypothèse, proportionnels, il s'ensuit (§. 21) que ces deux triangles sont semblables.

Ce qu'il fallait démontrer.

Quelle est la propriété de deux triangles équiangles ?

31. *Deux triangles équiangles ont les côtés homologues proportionnels, et sont par conséquent semblables* (§. 25).





Soient encore les triangles ABC (fig. 88) et DEF (fig. 89) ; et supposons

1°. ang. A = D,
2°. ang. B = E,
3°. ang. C = F.

Les côtés homologues (§. 28) seront

BC et EC,
AC et DF,
AB et DE.

Je dis que l'on aura ces trois rapports égaux

AB : DE : : BC : EF : : AC : DF (α).

Pour le démontrer, sur le côté DE du trian-

gle DEF prenons une portion DG = AB. Sur le côté DF prenons DH = AC, et tirons GH. Le triangle DGH sera égal au triangle ABC ; car l'angle D est, par hypothèse, égal à l'angle A, et les côtés DG, DH sont respectivement égaux aux côtés AB, AC. Donc (Tom. II, §. 502) ces deux triangles sont identiques : donc l'angle G, opposé au côté DH = AC, côté homologue de DF, est égal à l'angle E, opposé au côté DF, et l'angle H, opposé au côté DG=AB, côté homologue de DE, est égal à l'angle F, opposé au côté DE.

Mais puisque l'angle G du triangle DGH est égal à l'angle E du triangle DEF, comme ces deux angles sont internes-externes, il s'ensuit (Tom. II, §. 529) que les lignes GH, EF sont parallèles ; donc on obtient (§. 20),

$$GH : EF :: DG : DE :: DH : DF \; (\beta).$$

Substituant à $\left\{\begin{array}{l} GH \text{ son égale } BC, \\ DG \text{ son égale } AB, \\ DH \text{ son égale } AC, \end{array}\right.$

il en résulte

$$BC : EF :: AB : DE :: AC : DF \; (\gamma).$$

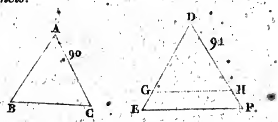
ou (Tom. Ier., §. 358),

$$AB : DE :: BC : EF :: AC : DF \; (\delta).$$

Ce qui s'accorde avec la proportion (α), et *ce qu'il fallait démontrer.*

32. Corollaire. Donc *deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun*, car alors le troisième de l'un est nécessairement égal au troisième de l'autre. Quelle est la propriété de deux triangles, lorsqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun ?

33. *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels.*



Soient (fig. 90 et 91) les triangles ABC, DEF, et supposons l'angle A égal à l'angle D, le rapport AB : DE égal au rapport AC : DF, en sorte que nous ayons cette proportion :

AB : DE : : AC : DF (α).

Je dis que nous obtiendrons

AB : DE :: AC : DF : : BC : EF (β).

Car, si nous plaçons le côté AB sur le côté DE, de manière que le point A tombe sur le point D et le point B sur un point quelconque G du côté DE, puisque l'angle BAC est, par hypothèse, égal à l'angle GDH, le côté AC prendra la direction du côté DF, et le point C tombera sur un point quelconque H du côté DF. En joignant GH on aura donc le triangle DGH identique avec le triangle ABC (Tom. II, §. 502).

Mais puisqu'on a par hypothèse

AB : DE : : AC : DF,

et que par construction DG = AB, et DH = AC, il en résulte

DG : DE : : DH : DF (γ).

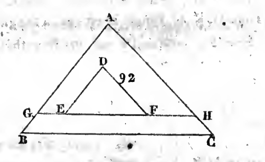
Mais les côtés DE, DF étant coupés proportionnellement aux points G et H, il s'ensuit (§. 18) que GH est parallèle à EF. Donc (Tom. II, §. 529) les angles G, E sont égaux comme internes-externes, ainsi que H, F. Donc les triangles DGH, DEF sont équiangles et par conséquent semblables (§. 31). Or, les triangles ABC, DGH sont identiques par construction ; donc les triangles ABC, DEF sont semblables. Donc enfin :

AB : DE :: AC : DF :: BC : EF (δ).

Ce qu'il fallait démontrer.

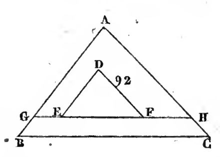
34. *Deux triangles qui ont les côtés parallèles chacun à chacun sont équiangles, et par conséquent semblables* (§. 25).

Quelle est la propriété de deux triangles qui ont les côtés parallèles chacun à chacun ?



Soient (fig. 92) le triangle ABC et le triangle DEF, dont je supposerai les côtés respectivement parallèles, savoir AB et DE, BC et EF, AC et DF. Je dis que nous avons :

ang. E=ang. B,
ang. F=ang. C,
ang. D=ang. A.



Prolongeons le côté EF jusqu'aux côtés AB et AC en G et H.

Puisque DE est, par hypothèse, parallèle à AB, les angles internes-externes DEF, AGF sont égaux (Tom. II, §. 524). De même, puisque GH est parallèle à BC, les angles internes-externes AGF, ABC sont aussi égaux. Donc (Tom. II, §. 1), l'angle E est égal à l'angle B.

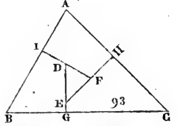
Ensuite, puisque DF est, par hypothèse, parallèle à AC, les angles internes-externes DFG, AHG sont égaux (Tom. II, §. 524). Pareillement, puisque GH est parallèle à BC, les angles internes-externes AHG, ACB sont aussi égaux. Donc (Tome II, §. 1) l'angle DFG est égal à l'angle ACB.

Donc le troisième angle D est égal au troisième angle A.

Ce qu'il fallait démontrer.

Quelle est la propriété de deux triangles qui ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun?

35. *Deux triangles qui ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun, sont équiangles, et par conséquent semblables* (§. 25).



Soient (fig. 93) les triangles ABC, DEF, et supposons respectivement perpendiculaires entr'eux les côtés AB et DF, BC et DE, AC et EF ;

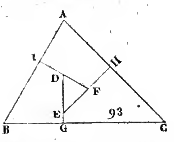
Je dis que nous aurons

ang. DEF = ang. C,
ang. DFE = ang. A,
ang. EDF = ang. B.

Prolongeons le côté DE jusqu'à la rencontre de BC au point G, et le côté DF jusqu'à la rencontre de AB au point I.

Dans le quadrilatère GEHC les angles G, H sont droits par hypothèse. Mais les quatre angles de ce quadrilatère valent ensemble quatre angles droits (Tom. II, §. 539); donc C + GEH = deux droits. Mais la somme des angles adjacens DEH, GEH est aussi égale à deux droits (Tom. II, §. 509). Retranchant de ces deux équations l'angle commun GEH, il reste C = DEH ou DEF.

De même, dans le quadrilatère AIFH, les angles IH sont droits par hypothèse. Mais les quatre angles de ce quadrilatère valent ensemble



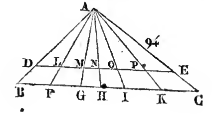
quatre angles droits (Tom. II, §. 539); donc A + IFH = deux droits. Mais la somme des angles adjacens EFI, IFH est aussi égale à deux droits (Tom. II, §. 509). Retranchant de ces deux équations l'angle commun IFH, il reste A = EFI ou EFD.

Ces deux triangles ayant deux angles égaux chacun à chacun, le troisième est nécessairement égal au troisième.

Ce qu'il fallait démontrer.

Si dans un triangle on mène entre les deux côtés de l'angle vertical une parallèle à la base, et que l'on conduise différentes droites du sommet à la base, que seront les sections de la parallèle à la base ?

36. *Si, dans un triangle on mène entre les deux côtés de l'angle vertical, une parallèle à la base et que l'on conduise différentes droites du sommet à la base, les sections de la parallèle à la base seront proportionnelles aux sections correspondantes de la base, c'est-à-dire que les sections de la parallèle à la base seront les antécédens, et les sections de la base les conséquens de plusieurs rapports égaux.*



Soit (fig. 94) le triangle ABC, et soit menée DE parallèle à BC. Je dis que l'on a cette suite de rapports égaux :

DL : BF : : LM : FG : : NO : HI : : OP : IK : : PE : KC.

En effet, puisque DL est parallèle à BF, les angles ADL, ABF sont égaux comme internes-externes (Tom. II, §. 524).

Les angles ALD, AFB sont aussi égaux par la même raison. Ainsi les triangles ADL, ABF ont deux angles égaux chacun à chacun ; donc le troisième A, qui est d'ailleurs commun, est égal au troisième : donc ces deux triangles sont équiangles, et par conséquent semblables. Donc nous avons cette proportion :

DL : BF : : AL : AF (α).

De même, puisque LM est parallèle à FG, les angles ALM, AFG sont égaux comme internes-externes (Tom. II, §. 524). Les angles AML, AGF sont aussi égaux par la même raison. Donc les deux triangles ALM, AFG sont équiangles, et par conséquent semblables. Donc nous obtenons cette proportion :

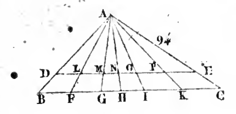
AL : AF : : LM : FG (β),

ou (Tom. Ier., §. 358),

LM : FG : : AL : AF (γ).

Dans les proportions (α) et (γ) les termes du second rapport étant identiques, il en résulte (Tom. II, §. 1),

DL : BF : : LM : FG (δ).



Nous avons aussi MN parallèle à GH, et par conséquent les angles AMN, AGH égaux comme internes-externes (Tom. II, §. 524), ainsi que les angles ANM, AHG. Donc les deux triangles AMN, AGH sont semblables, et on a la proportion

$$AM : AG :: MN : GH \ (\varepsilon).$$

Mais les triangles ALM, AFG donnent la proportion

$$LM : FG :: AM : AG \ (\zeta),$$

ou (Tom. Ier., §. 358),

$$AM : AG :: LM : FG \ (\eta).$$

Dans les proportions (ε) et (η) les deux termes du premier rapport étant identiques, on obtient (Tom. II, §. 1),

$$MN : GH :: LM : FG \ (\theta).$$

Ajoutant aux deux rapports de la proportion (δ) le rapport MN : GH qui lui est égal, il en résulte ces trois rapports égaux :

$$DL : BF :: LM : FG :: MN : GH \ (\iota).$$

Nous avons encore NO parallèle à HI, en sorte que les angles ANO, AHI sont égaux comme internes-externes (Tom. II, §. 524), ainsi que les

angles AON, AIH. Donc les deux triangles ANO, AHI sont semblables, et l'on obtient la proportion

AN : AH : : NO : HI ($\varkappa$).

Mais les triangles AMN, AGH fournissent la proportion MN : GH : : AN : AH (λ),

ou (Tom. Ier., §. 358),

AN : AH : : MN : GH (μ).

Dans les proportions ($\varkappa$) et (μ) les deux termes du premier rapport étant identiques, il en résulte (Tom. II, §. 1),

NO : HI : : MN : GH (ν).

Ajoutant aux trois rapports (ι) le rapport NO : HI qui leur est égal, on obtient ces quatre rapports égaux :

DL : BF : : LM : FG : : MN : GH : : NO : HI (ξ).

Ensuite, OP étant parallèle à IK, les angles AOP, AIK sont égaux comme internes-externes (Tom. II, §. 524), ainsi que les angles APO, API. Donc les deux triangles AOP, AIK sont semblables, et donnent la proportion

AO : AI : : OP : IK (o).

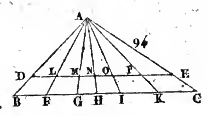
Mais les triangles ANO, AHI fournissent la proportion

NO : HI : : AO : AI (π),

ou (Tom. Ier., §. 358),

AO : AI : : NO : HI (ρ).

Dans les proportions (o) et (ρ) les deux ter-



mes du premier rapport étant identiques, nous obtenons (Tom. II, §. 1),

OP : IK :: NO : HI (σ).

Ajoutant aux quatre rapports (ξ) le rapport OP : IK qui leur est égal, on trouve ces cinq rapports égaux;

DL : BF :: LM : FG :: MN : GH :: NO : HI :: OP : IK (τ).

Enfin, PE étant parallèle à KC, les angles APE, AKC sont égaux comme internes-externes (Tom. II, §. 524), de même que AEP, ACK. Donc les deux triangles APE, AKC sont semblables, et fournissent la proportion

AP : AK : : PE : KC (φ).

Mais les triangles AOP, AIK donnent la proportion

OP : IK : : AP : AK (χ),

ou (Tome Ier., §. 358),

AP : AK : : OP : IK (ψ).

Dans les proportions (φ) et (ψ) les deux termes du premier rapport étant identiques, nous tirons (Tome II, §. 1),

PE : KC : : OP : IK (ω).

Ajoutant aux cinq rapports (τ) le rapport PE : KC qui leur est égal, j'obtiens ces six rapports égaux,

DL : BF :: LM : FG :: MN : GH :: NO : HI :: OP : IK :: PE : KC (α).

Ce qu'il fallait démontrer.

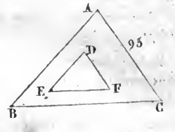
37. Corollaire. *Si dans un triangle on mène entre les deux côtés de l'angle vertical une parallèle à la base, que l'on divise cette base en un nombre quelconque de parties égales, et que du sommet on conduise des droites à chaque point de division, ces droites partageront la parallèle à la base en parties égales.*

Si dans un triangle on mène entre les deux côtés de l'angle vertical une parallèle à la base, que l'on divise cette base en un nombre quelconque de parties égales, et que du sommet on conduise des droites à chaque point de division, comment ces droites partageront-elles la parallèle à la base?

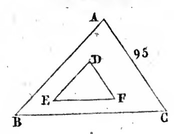
Car, d'après la proposition du §. 36, les parties de la base seraient les conséquens d'un certain nombre de rapports égaux, tandis que celles de la parallèle en seraient les antécédens; or, les conséquens étant égaux, il faut nécessairement que les antécédens le soient aussi.

38. *Les périmètres de deux triangles semblables sont entre eux comme leurs côtés homologues.*

Comment sont entre eux les périmètres de deux triangles semblables?



Soient (fig. 95) les triangles ABC, DEF que nous supposerons semblables. Soient les côtés homologues AB et DE, BC et EF, AC et DF.



Je dis que nous aurons cette proportion :

AB+BC+AC : DE+EF+DF : : AB : DE,
ou : : BC : EF,
ou : : AC : DF.

Les triangles ABC, DEF étant semblables, donnent (§. 31) ces trois rapports égaux :

AB : DE : : BC : EF : : AC : DF (α).

Donc (Tome Ier., §. 379),

AB+BC+AC : DE+EF+DF : : AB : DE,
ou : : BC : EF,
ou : : AC : DF.

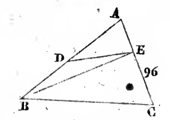
Ce qu'il fallait démontrer.

Lorsque l'on considère deux triangles qui ont un angle égal, quels sont les termes du second rapport d'une proportion dont les termes du premier rapport sont les surfaces de ces deux triangles ?

39. *Les surfaces de deux triangles qui ont un angle égal sont entr'elles comme les produits des côtés de l'angle égal.*

Soient (fig. 96) les triangles ABC, ADE qui ont l'angle commun A, je dis que nous avons Surf. ABC : surf. ADE : : AB × AC : AD × AE.

En effet, tirons BE. Les triangles AEB, AED ont tous deux leur sommet en E, et leurs bases AB, AD sont sur la même ligne droite. Donc ils ont même hauteur, et sont par conséquent en-



tr'eux comme leurs bases (§. 7), c'est-à-dire que nous avons,

Surf. AEB : surf. AED : : AB : AD (α).

Les triangles ABC, ABE ont l'un et l'autre leur sommet en B (1), et leurs bases AC, AE sont sur la même ligne droite. Donc ils ont même hauteur, et sont par conséquent entr'eux comme leurs bases (§. 7). Nous avons donc

Surf. ABC : surf. ABE : : AC : AE (β).

Multipliant ces deux proportions par ordre, ce qui (Tom. Ier., §. 384) donne quatre produits en proportion, il en résulte

Surf. AEB × surf. ABC : surf. AED × surf. ABE :: AB × AC : AD × AE (γ).

Mais les facteurs AEB, ABE des termes du premier rapport sont identiques. Donc on peut diviser chaque terme du premier rapport par ce facteur commun, ce qui (Tom. Ier., §. 371)

(1) Les jeunes gens inattentifs ont peut-être besoin que je leur répète ici que l'on est toujours maître de prendre pour sommet d'un triangle l'un quelconque de ses angles, et que par conséquent chaque angle d'un même triangle peut être tour-à-tour pris pour le sommet de ce triangle. Il en est de même de la base, puisque l'on nomme ainsi le côté qui est opposé au sommet.

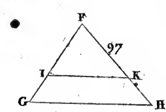
ne détruit pas la proportion, et l'on obtient ainsi cette nouvelle proportion :

Surf. ABC : surf. AED : : AB × AC : AD × AE (δ).

Ce qu'il fallait démontrer.

Quels sont les deux derniers termes d'une proportion dont les deux premiers sont les surfaces de deux triangles semblables ?

40. *Les surfaces de deux triangles semblables sont entr'elles comme les carrés des côtés homologues.*



Soit (fig. 97) la ligne IK parallèle à GH. Les triangles FGH, FIK, étant par-là semblables, je dis que l'on aura

$$\text{Surf. FGH : surf. FIK} :: \overline{GH}^2 : \overline{IK}^2 :: \overline{FH}^2 : \overline{FK}^2 :: \overline{FG}^2 : \overline{FI}^2.$$

Car l'angle FGH étant égal à l'angle FIK, l'on a (§. 39) cette proportion :

Surf. FGH : surf. FIK : : FG × GH : FI × IK.

Mais puisque les triangles FGH, FIK sont semblables, nous avons aussi (§. 31),

FG : FI : : GH : IK (β).

Multipliant les deux rapports de la proportion (β) par le rapport GH : IK, ce qui (Tom. Ier., §. 369), ne détruit pas la proportion, puisque la raison reste la même, j'obtiens

$$FG \times GH : FI \times IK :: \overline{GH}^2 : \overline{IK}^2 \ (\gamma).$$

Or, nous avons vu par la proportion (α) que

le rapport FG × GH : FI × IK est égal au rapport surf. FGH : surf. FIK. Substituant donc ce dernier rapport au premier rapport de la proportion (γ), il en résulte :

1°. Surf. FGH : surf. FIK :: $\overline{GH}^2 : \overline{IK}^2$ (δ).

Les triangles semblables FGH, FIK, dont l'angle FHG est égal à l'angle FKI donnent aussi (§. 39) :

Surf. FGH : surf. FIK :: GH × FH : IK × FK (ε).

Mais les triangles FGH, FIK, étant semblables, on obtient (§. 31).

GH : IK : : FH : FK (ζ).

Multipliant les deux rapports de la proportion (ζ) par le rapport FH : FK, ce qui (T. I[er]., §. 369) ne détruit pas la proportion, puisque la raison reste la même, il en résulte,

GH × FH : IK × FK : : $\overline{FH}^2 : \overline{FK}^2$ (η).

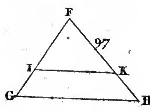
Dans la proportion (ε) le rapport GH × FH : IK × FK est égal au rapport surf. FGH : surf. FIK. Substituant donc ce dernier rapport au premier rapport de la proportion (η), j'obtiens

Surf. FGH : surf. FIK : : $\overline{FH}^2 : \overline{FK}^2$ (θ).

Ainsi le rapport $\overline{FH}^2 : \overline{FK}^2$ est égal à chacun des rapports de la proportion (δ). Donc

2°. Surf. FGH : surf. FIK :: $\overline{GH}^2 : \overline{IK}^2 :: \overline{FH}^2 : \overline{FK}^2$ (ι).

Les triangles semblables FGH, FIK, dont



l'angle F est commun, donnent encore (§. 39) :

Surf. FGH : surf. FIK :: FH × FG : FK × FI (κ).

Mais les triangles FGH, FIK sont semblables ; donc (§. 31)

$$FH : FK :: FG : FI \ (\lambda).$$

Multipliant les deux rapports de la proportion (λ) par le rapport FG : FI, ce qui (T. Ier., §. 369) ne détruit pas la proportion, puisque la raison reste la même, je trouve

$$FH \times FG : FK \times FI :: \overline{FG}^2 : \overline{FI}^2 \ (\mu).$$

Le rapport $\overline{FG}^2 : \overline{FI}^2$ est donc égal à chacun des trois rapports de (ι). Donc enfin

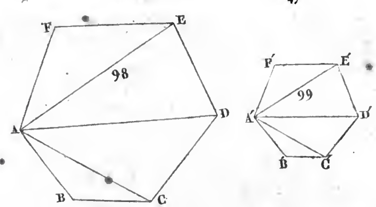
3°. Surf. FGH : surf. FIK :: $\overline{GH}^2 : \overline{IK}^2 :: \overline{FH}^2 : \overline{FK}^2 :: \overline{FG}^2 : \overline{FI}^2$ (ν).

Ce qu'il fallait démontrer.

De quels triangles deux polygones semblables sont-ils composés ?

41. *Deux polygones semblables sont composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et disposés de la même manière.*

Soient (fig. 98 et 99) les polygones ABCDEF et A'B'C'D'E'F' dont les angles désignés par la même lettre sont supposés égaux et leurs côtés proportionnels.



En menant dans ces deux figures d'un même angle A et A' des diagonales aux autres angles, on forme quatre triangles dans chacune, savoir :

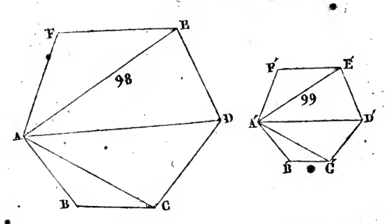
AFE, A'F'E'
AED, A'E'D'
ADC, A'D'C'
ACB, A'C'B'.

Or, je dis que les triangles désignés par les mêmes lettres sont semblables.

En effet, puisque par hypothèse l'angle AFE est égal à l'angle A'F'E', et que les côtés AF, FE de l'angle F sont proportionnels aux côtés A'F', F'E' de l'angle F' comme étant homologues, il s'ensuit (§. 33) que

1°. Les triangles AFE, A'F'E' sont semblables.

Ensuite, puisque l'angle FEA, opposé au côté AF, est égal à l'angle F'E'A' opposé au côté A'F' homologue de AF, et que l'angle total FED est égal à l'angle total F'E'D' son homologue, si de



l'angle total FED on retranche l'angle FEA, et que de l'angle total F'E'D' on retranche l'angle F'E'A', les restes AED, A'E'D' seront égaux (Tom. II, §. 7). Les triangles AED, A'E'D' ont donc un angle égal compris entre côtés proportionnels; donc (§. 33)

2°. Les triangles AED, A'E'D' sont semblables.

Maintenant, puisque l'angle EDA, opposé au côté AE, est égal à l'angle E'D'A' opposé au côté A'E', homologue de AE, et que l'angle total EDC est égal à l'angle total E'D'C' son homologue, si de l'angle total EDC on retranche l'angle EDA, et que de l'angle total E'D'C' on retranche l'angle E'D'A', les restes ADC, A'D'C' seront égaux (Tom. II, §.7). Les triangles ADC, A'D'C' ont donc un angle égal compris entre côtés proportionnels; donc (§. 33)

3°. Les triangles ADC, A'D'C' sont semblables.

Enfin, puisque l'angle DCA, opposé au côté AD, est égal à l'angle D'C'A' opposé au côté A'D' homologue de AF, et que l'angle total DCB est égal à l'angle total D'C'B' son homologue, si de l'angle total DCB on retranche l'angle DCA, et que de l'angle total D'C'B' on retranche l'angle D'C'A', les restes ACB, A'C'B' seront égaux (Tom. II, §. 7). Les triangles ACB, A'B'C' ont donc un angle égal compris entre côtés proportionnels; donc (§. 33)

4°. Les triangles ACB, A'B'C' sont semblables.

Ce qu'il fallait démontrer.

42. *Réciproquement, si deux polygones sont composés d'un même nombre de triangles semblables et disposés de la même manière, ces deux polygones sont semblables.*

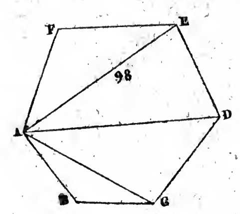
Quelle est la propriété de deux polygones composés d'un même nombre de triangles semblables?

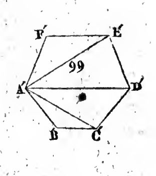
Soient (fig. 98 et 99) les polygones ABCDEF et A'B'C'D'E'F'.

Je dis que si l'on a

angle F = angle F' (α),
angl. FEA = angl. F'E'A' (β),
angl. AED = angl. A'E'D' (γ),
angl. EDA = angl. E'D'A' (δ),
angl. ADC = angl. A'D'C' (ε),
angl. DCA = angl. D'C'A' (ζ),
angl. ACB = angl. A'C'B' (η),
angl. B = angl. B' (θ),

les triangles AFE, A'F'E', AED, A'E'D', ADC, A'D'C', ACB, A'C'B', seront semblables chacun à chacun, puisqu'ils auront ainsi deux





angles égaux chacun à chacun, et qu'alors le troisième est nécessairement égal au troisième.

Il s'agit donc de prouver que les angles des deux polygones, abstraction faite des angles auxquels donnent lieu les diagonales, sont égaux chacun à chacun ; car il est déjà prouvé que les côtés homologues sont proportionnels par l'hypothèse des triangles semblables.

Or, nous avons par l'équation (α),

1°. Angle F = angle F′ (ι).

Ajoutant membre à membre des équations (β) et (γ), ce qui (Tom. II, §. 4) ne détruit pas l'égalité, on obtient,

2°. Angle FED = angle F′E′D′ (κ).

Ajoutant membre à membre des équations (δ) et (ε), on trouve,

3°. Angle EDC = angle E′D′C′ (λ).

Ajoutant membre à membre des équations (ζ) et (η), il en résulte,

4°. Angle DCB = angle D'C'B' (μ).

Enfin, par l'équation (θ) on a,

5°. angle B = angle B' (ν).

Ce qu'il fallait démontrer.

43. *Les périmètres de deux polygones semblables sont entr'eux comme leurs côtés homologues, c'est-à-dire que les périmètres sont les deux termes du premier rapport d'une proportion dont les termes du second rapport sont deux côtés homologues quelconques des polygones.*

Quels sont les deux derniers termes d'une proportion dont les deux premiers termes sont les périmètres de deux polygones semblables?

Soient (fig. 98 et 99) les polygones ABCDEF, A'B'C'D'E'F' que nous supposons semblables, c'est-à-dire que les côtés représentés par les mêmes lettres dans les deux figures sont proportionnels, et comprennent des angles égaux chacun à chacun Je dis que l'on a

Périm. ABCDEF : périm. A'B'C'D'E'F' : : AB : A'B'
: : BC : B'C'
: : CD : C'D'
: : DE : D'E'
: : EF : E'F'
: : AF : A'F'

Car, puisque par hypothèse ces deux polygones sont semblables, il s'ensuit (§. 26) que l'on a cette suite de rapports égaux,

AB : A'B' : : BC : B'C' : : CD : C'D' : : DE : D'E' : : EF : E'F' : : AF : A'F'.

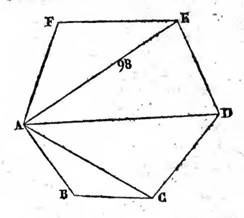
Donc (Tom. Ier., §. 379),

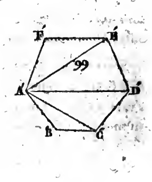
$$AB+BC+CD+DE+EF+AF : A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'F'+A'F' :: AB : A'B' :: BC : B'C' :: CD : C'D' :: DE : D'E' :: EF : E'F' :: AF : A'F'$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Quels sont les deux derniers termes d'une proportion dont les deux premiers termes sont les surfaces de deux polygones semblables ?

44. ***Les surfaces de deux polygones semblables sont entr'elles comme les carrés des côtés homologues.***





Soient (fig. 98 et 99) les polygones semblables ABCDEF; A'B'C'D'E'F', dont les côtés et les angles homologues sont désignés par les mêmes lettres; ces polygones auront un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et disposés de la même manière (§. 41). On aura donc (§. 40):

$$\text{Surf. ABC : surf. A'B'C'} :: \overline{AC}^2 : \overline{A'C'}^2 \ (\alpha).$$

$$\text{Surf. ACD : surf. A'C'D'} :: \overline{AC}^2 : \overline{A'C'}^2 \ (\beta).$$

Les termes du second rapport des proportions (α) et (β) étant identiques, il en résulte (Tom. II, §. 1),

Surf. ABC : surf. A'B'C' : : surf. ACD : surf. A'C'D' (γ).

On aura donc aussi (§. 40)

$$\text{Surf. ACD : surf. A'C'D' : : } \overline{AD}^2 : \overline{A'D'}^2 \ (\delta),$$

$$\text{Surf. ADE : surf. A'D'E' : : } \overline{AD}^2 : \overline{A'D'}^2 \ (\varepsilon).$$

Les termes du second rapport des proportions (δ) et (ε) étant identiques, j'obtiens (T. II, §. 1),

Surf. ACD : surf. A'C'D' : : surf. ADE : surf. A'D'E' (ζ).

Mais le rapport surf. ADE : surf. A'D'E' étant égal au rapport surf. ACD : surf. A'C'D' qui est identique avec le second rapport de (γ), on peut ajouter ce rapport à (γ) ; l'on a donc

Surf. ABC : surf. A'B'C' : : surf. ACD : surf. A'C'D'
: : surf. ADE : surf. A'D'E' (η).

On aura enfin (§. 40)

$$\text{Surf. ADE : surf. A'D'E' : : } \overline{AE}^2 : \overline{A'E'}^2 \ (\theta),$$

$$\text{Surf. AEF : surf. A'E'F' : : } \overline{AE}^2 : \overline{A'E'}^2 \ (\iota).$$

Les termes du second rapport des proportions (θ) et (ι) étant identiques, je conclus (T. II, §. 1) :

Surf. ADE : surf. A'D'E' : : surf. AEF : surf. A'E'F' (κ).

Mais le rapport surf. AEF : surf. A'E'F' étant égal au rapport surf. ADE : surf. A'D'E' qui est identique avec le troisième rapport de (η), on

peut ajouter ce rapport à (η); l'on obtient donc,

$$\left.\begin{array}{l}\text{Surf. ABC : surf. A'B'C' :: surf. ACD : surf. A'C'D'}\\ \qquad\qquad\text{:: surf. ADE : surf. A'D'E'}\\ \qquad\qquad\text{:: surf. AEF : surf. A'E'F'}\end{array}\right\}(\lambda).$$

Donc (Tom. Ier., §. 379),

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Surf. ABC + surf. ACD + surf. ADE + surf. AEF :}\\ \text{Surf. A'B'C' + surf. A'C'D' + surf. A'D'E' + surf. A'E'F'}\end{array}\right.\left.\begin{array}{l}\text{:: surf. ABC : surf. A'B'C'}\\ \text{:: surf. ACD : surf. A'C'D'}\\ \text{:: surf. ADE : surf. A'D'E'}\\ \text{:: surf. AEF : surf. A'E'F'}\end{array}\right\}(\mu).$$

Mais l'on a

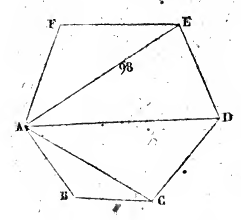
$$\text{Surf. ABC + surf. ACD + surf. ADE + surf. AEF = surf. ABCDEF } (\nu).$$

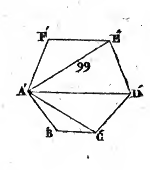
L'on a aussi

$$\text{Surf. A'B'C' + surf. A'C'D' + surf. A'D'E' + surf. A'E'F' = surf. A'B'C'D'E'F' } (\xi).$$

De là résulte

$$\left.\begin{array}{l}\text{Surf. ABCDEF : surf. A'B'C'D'E'F' :: surf. ABC : surf. A'B'C'}\\ \qquad\qquad\text{:: surf. ACD : surf. A'C'D'}\\ \qquad\qquad\text{:: surf. ADE : surf. A'D'E'}\\ \qquad\qquad\text{:: surf. AEF : surf. A'E'F'}\end{array}\right\}(o).$$





Mais, par le §. 40, on peut substituer

Aux rapports		les rapports
	surf. ABC : surf. A'B'C'	$\overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2$; $\overline{BC}^2 : \overline{B'C'}^2$
	surf. ACD : surf. A'C'D'	$\overline{CD}^2 : \overline{C'D'}^2$
	surf. ADE : surf. A'D'E'	$\overline{DE}^2 : \overline{D'E'}^2$
	surf. AEF : surf. A'E'F'	$\overline{EF}^2 : \overline{E'F'}^2$; $\overline{AF}^2 : \overline{A'F'}^2$

Donc enfin,

Surf. ABCDEF : surf. A'B'C'D'E'F' $:: \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2$
$:: \overline{BC}^2 : \overline{B'C'}^2$
$:: \overline{CD}^2 : \overline{C'D'}^2$
$:: \overline{DE}^2 : \overline{D'E'}^2$
$:: \overline{EF}^2 : \overline{E'F'}^2$
$:: \overline{AF}^2 : \overline{A'F'}^2$

Ce qu'il fallait démontrer.

45. Corollaire. *Donc les surfaces de deux polygones semblables sont entr'elles comme les carrés des diagonales qui joignent deux angles égaux chacun à chacun.*

Quels sont les deux derniers termes d'une proportion dont les deux premiers sont les surfaces de deux polygones semblables ?

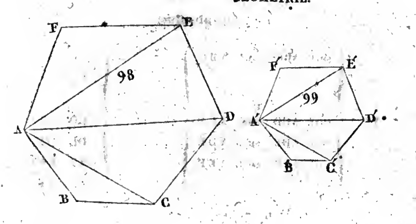
46. *Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont des figures semblables* (1).

Quelle est la propriété de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés ?

Car un polygone contient autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés dans ce polygone moins deux (Tom. II, §. 539). Donc, les

(1) On appelle *polygone régulier* celui dont les côtés et les angles sont égaux.

Qu'entend-on par polygone régulier ?



deux polygones proposés contiennent le même nombre d'angles droits, et par conséquent d'angles égaux; et comme chaque polygone est supposé avoir les angles égaux, il s'ensuit :

1°. Que les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre.

Ensuite, puisque chacun des deux polygones est supposé avoir les côtés égaux, les côtés de l'un formeront les antécédens, et les côtés de l'autre les conséquens d'une suite de rapports identiques.

Donc

2°. Les côtés homologues des deux polygones sont proportionnels (1).

Ce qu'il fallait démontrer.

Quels sont les deux derniers termes d'une proportion dont les deux premiers sont les surfaces de deux cercles d'un rayon quelconque ?

47. Corollaire. *Les surfaces de deux cercles d'un rayon quelconque sont entr'elles,*

(1) On sent bien qu'ici les côtés homologues peuvent être des côtés quelconques, puisqu'ils sont tous égaux dans chaque figure.

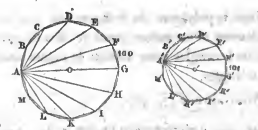
1°. *Comme les carrés de leurs diamètres;*

2°. *Comme les carrés de leurs rayons;*

3°. *Comme les carrés des cordes d'un même nombre de degrés;*

4°. *Comme les carrés des arcs d'un même nombre de degrés;*

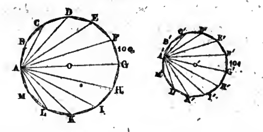
5°. *Comme les carrés de leurs circonférences.*



En effet, soient (fig. 100 et 101) les cercles ABCDEFGHIKLM et A'B'C'D'E'F'G'H'I'K'L'M' dont les centres sont O et O', et soient menés les diamètres AOG, A'O'G'. Partageons ensuite chaque demi-circonférence en deçà et en delà de ces diamètres, en six parties égales. Chaque circonférence sera ainsi partagée en douze arcs égaux, et leurs cordes seront les côtés d'un duodécagone (1) régulier.

Dans le polygone de la figure 100 conduisons d'un même point A des diagonales à tous les angles pour former autant de triangles qu'il y a de côtés dans le polygone, moins deux, c'est-à-dire pour former dix triangles.

(1) *Duodécagone*, un polygone de douze côtés, vient des trois mots grecs *duo*, deux, *déca*, dix, et *goné*, angle; car il y a toujours autant d'angles que de côtés.



Dans le polygone de la figure 101 conduisons également d'un même point A' des diagonales à tous les angles pour former le même nombre de triangles.

Nous aurons (§. 46),

Surf. ABCDEFGHJKLM : surf. A'B'C'D'E'F'G'H'I'K'L'M' : : $\overline{AG}^2 : \overline{A'G'}^2$ (α).

Or, AG, A'G' sont les diamètres des deux cercles proposés.

Divisant par quatre les deux termes du second rapport, ce qui (Tom. Ier., §. 371) ne détruit pas la proportion, on obtient :

Surf. ABCDEFGHIKLM : surf. A'B'C'D'E'F'G'H'I'K'L'M' :: $\overline{1/4 AG}^2 : \overline{1/4 A'G'}^2$ (β).

Or, la moitié de AG est le rayon du cercle de la fig. 100, dont AG est le diamètre. La moitié de A'G' est pareillement le rayon du cercle de la figure 101 dont A'G' est le diamètre. Donc $\overline{1/4}\ \overline{AG}^2 = R^2$, et $\overline{1/4}\ \overline{A'G'}^2 = R'^2$, en représentant le rayon par R et R' (Tom. II, §. 153).

Nous aurons aussi (§. 46),

Surf. ABCDEFGHIKLM : surf. A'B'C'D'E'F'G'H'I'K'L'M' : : $\overline{FG}^2 : \overline{F'G'}^2$ (γ).

Or, FG est une des douze cordes égales de la circonférence de la figure 100, et F'G' est une des douze cordes égales de la circonférence de la figure 101.

Si nous considérons maintenant qu'un arc et qu'une corde, quelque petits qu'ils soient, peuvent se partager en deux par la pensée, et que cette bissection peut se continuer à l'infini, il ne sera pas difficile d'imaginer qu'un cercle peut être envisagé comme un polygone régulier, dont les côtés sont infiniment petits, et ne diffèrent du point que d'une quantité aussi petite que l'on veut. Il est facile aussi de sentir que la bissection étant poussée à l'infini, l'arc et la corde ne différeront d'aucune quantité assignable.

Donc, le carré d'un arc de cercle pourra toujours être substitué au carré de sa corde, et VICE VERSA, *lorsqu'on comparera cet arc ou cette corde à l'arc ou la corde d'un même nombre de degrés d'un autre cercle* (1).

Donc il est bien vrai que les surfaces de deux cercles d'un rayon quelconque sont entr'elles

1°. Comme les carrés de leurs diamètres;

2°. Comme les carrés de leurs rayons;

3°. Comme les carrés des cordes d'un même nombre de degrés;

4°. Comme les carrés des arcs d'un même nombre de degrés;

5°. Comme les carrés de leurs circonférences.

Ce qu'il fallait démontrer.

Quels sont les deux derniers termes d'une proportion dont les deux premiers sont les circonférences de deux cercles ?

48. COROLLAIRE Ier. Puisque les cercles peuvent être considérés comme des polygones réguliers semblables d'un nombre infini de côtés, il s'ensuit (§. 43) *que les circonférences de deux cercles qui sont alors de véritables périmètres de polygones sont entr'elles,*

1°. *Comme les diamètres*	*des deux cercles.*
2°. *Comme les rayons*	
3°. *Comme les cordes d'un même nombre de degrés*	
4°. *Comme les arcs d'un même nombre de degrés*	

Que sont les arcs semblables de deux cercles, c'est-à-dire les arcs qui ont un même nombre de degrés, par rapport aux rayons de ces deux cercles ?

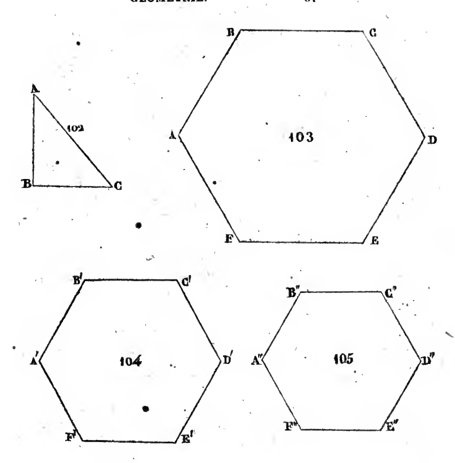
COROLLAIRE II. Donc *les arcs semblables de deux cercles, c'est-à-dire les arcs qui ont un même nombre de degrés, sont entr'eux comme les rayons de ces cercles.*

Que sont les secteurs semblables de deux cercles, c'est-à-dire les secteurs qui s'appuient sur des arcs d'un même nombre de degrés, par rapport aux carrés de rayons de ces deux cercles?

COROLLAIRE III. Donc *les secteurs semblables de deux cercles, c'est-à-dire les secteurs qui s'appuient sur des arcs d'un même nombre de degrés, sont entr'eux comme les carrés de leurs rayons.*

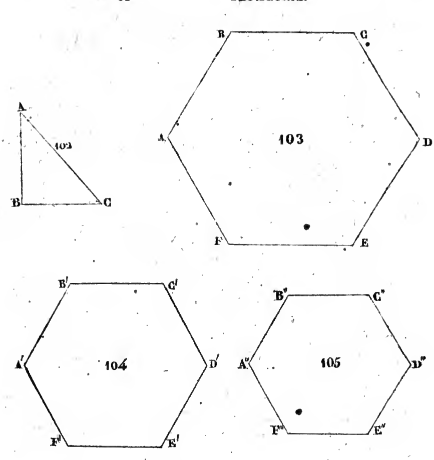
De quelle grandeur est la surface d'un polygone régulier construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle relativement aux surfaces de deux polygones réguliers construits sur les deux côtés de l'angle droit ?

49. *La surface d'un polygone régulier construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à la somme des surfaces de deux autres polygones réguliers (d'un même nombre de côtés) construits sur les deux côtés de l'angle droit.*



Soit (fig. 102) le triangle ABC rectangle en B, et construisons sur l'hypoténuse AC le polygone régulier ABCDEF de la figure 103, sur le côté AB le polygone régulier A'B'C'D'E'F' de la figure 104, et sur le côté BC le polygone régulier A"B"C"D"E"F" de la fig. 105. Je dis que nous aurons,

ABCDEF = A'B'C'D'E'F' + A"B"C"D"E"F".



Car, puisque (Tom. II, §. 562) le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit, nous avons (fig. 102),

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \ (\alpha).$$

Mais cette proposition ne cesserait pas d'être vraie si les deux côtés de l'angle droit étaient

égaux. Supposons donc pour un instant qu'ils soient égaux, et que nous ayons $\overline{AB} = \overline{BC}$; nous obtiendrons ainsi,

$$\overline{AC}^2 = 2\overline{AB}^2.$$

Le rapport du carré de l'hypoténuse à celui du carré d'un des deux côtés égaux de l'angle droit est donc comme 2 est à un.

Or, nous avons vu (§. 44) que les surfaces de deux polygones semblables sont entr'elles comme les carrés des côtés homologues; et comme, dans notre hypothèse, les côtés homologues sont l'hypoténuse et un des côtés égaux de l'angle droit, il s'ensuit que la raison des carrés des côtés homologues est deux. Donc, dans une proportion dont les deux premiers termes sont les surfaces de deux polygones réguliers semblables, construits l'un sur l'hypoténuse, l'autre sur l'un des deux côtés égaux de l'angle droit, et dont les deux derniers termes sont les carrés de ces côtés, la raison est deux.

Quelle est la grandeur de la surface d'un polygone régulier construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle, relativement à la surface d'un polygone régulier construit sur l'un des deux côtés égaux de l'angle droit?

Donc, *la surface d'un polygone régulier construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale au double de la surface d'un polygone régulier, construit sur l'un des deux côtés égaux de l'angle droit* (β).

Donc enfin un polygone régulier construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme de deux autres polygones réguliers

d'un même nombre de côtés construits sur les deux côtés de l'angle droit.

Ce qu'il fallait démontrer.

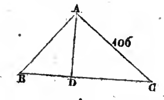
Si de l'angle droit d'un triangle rectangle on abaisse une perpendiculaire sur l'hypoténuse, quelles sont les trois circonstances auxquelles on donne lieu ?

50. *Si de l'angle droit d'un triangle rectangle on abaisse une perpendiculaire sur l'hypoténuse,*

1o. *Chaque triangle partiel sera équiangle au triangle total, et par conséquent les trois triangles seront semblables ;*

2o. *Chaque côté de l'angle droit sera moyen proportionnel entre l'hypoténuse et la section adjacente de l'hypoténuse ;*

3o. *La perpendiculaire sera moyenne proportionnelle entre les deux sections de l'hypoténuse.*



Soit (fig. 106) le triangle ABC rectangle en A. Soit AD perpendiculaire sur l'hypoténuse BC. Je dis :

1o. Que le triangle partiel ABD est équiangle au triangle total ABC ;

Car l'angle B est commun, et l'angle droit BDA est égal à l'angle droit BAC : donc le troisième angle BAD est égal au troisième angle ACB.

Les côtés homologues ou opposés aux angles égaux, sont :

Triangle partiel ABD	AB	Triangle total ABC	BC	
	AD		AC	(α).
	BD		AB	

Le triangle partiel ADC est de même équiangle au triangle total ABC.

Car l'angle C est commun, et l'angle droit ADC est égal à l'angle droit BAC : donc le troisième angle CAD est égal au troisième angle ABC.

Les côtés homologues ou opposés aux angles égaux, sont :

Triangle partiel ADC	AC	Triangle total ABC	BC	
	AD		AB	(β).
	CD		AC	

Le triangle partiel ABD est aussi équiangle au triangle partiel ADC.

Car l'angle droit BDA est égal à l'angle droit ADC, et nous avons vu ci-dessus que l'angle ABC est égal à l'angle CAD, et que l'angle BAD est égal à l'angle ACB.

Les côtés homologues ou opposés aux angles égaux, sont :

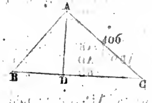
AB	AC	
AD	CD	(γ).
BD	AD	

Je dis :

2°. Que l'on a ces proportions ;

BC : AB : : AB : BD (δ),

BC : AC : : AC : CD (ε).



Car la proportion (δ) est fournie par les côtés homologues des accolades (α), et la proportion (ι) est déduite des côtés homologues des accolades (β).

Je dis :

3°. Que l'on obtient cette proportion,

$$BD : AD : : AD : CD \ (\epsilon).$$

Car la proportion (ϵ) résulte des côtés homologues des accolades (γ).

Ce qu'il fallait démontrer.

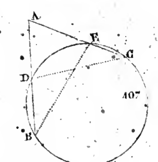
Si deux sécantes d'un cercle se rencontrent hors de ce cercle, à quoi est égal le produit d'une sécante entière par sa partie extérieure?

51. *Si deux sécantes d'un cercle se rencontrent hors de ce cercle, le produit d'une sécante entière par sa partie extérieure est égal au produit de l'autre sécante entière par sa partie extérieure.*

Soient (fig. 107) les sécantes AB, AC. Je dis que l'on aura,

$$AB \times AD = AC \times AE \ (\alpha).$$

En effet, tirons BE et DC. Les triangles ABE, ADC ont l'angle commun A. L'angle ABE s'appuie sur le même arc DE que l'angle ACD; donc ils ont tous deux pour mesure la moitié de l'arc DE (Tom. II, §. 599). Donc ces deux



angles sont égaux, et par conséquent les deux triangles ont deux angles égaux chacun à chacun; donc ils sont équiangles.

Les côtés homologues des deux triangles sont donc,

Côtés du triangle ABE	BE AE AB	Côtés du triangle ADC	BE AD AC	(β).

De là résulte cette proportion :

$$AB : AC :: AE : AD \quad (\gamma).$$

Donc $\quad AB \times AD = AC \times AE \quad (\delta).$

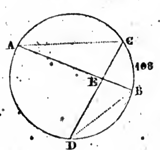
Ce qu'il fallait démontrer.

La proportion (γ) signifie aussi que *les sécantes entières sont les deux premiers termes d'une proportion dont les deux derniers sont les parties extérieures des sécantes, mais dont le second antécédent est la partie extérieure du premier conséquent* (ε).

Si deux sécantes d'un cercle se rencontrent hors de ce cercle, et que les deux premiers termes d'une proportion soient les sécantes entières, quels seront les deux derniers termes de cette proportion ?

52. *Si deux cordes se coupent dans un cercle, les deux sections de l'une, prises comme facteurs, donnent le même produit que les deux sections de l'autre.*

Si deux cordes se coupent dans un cercle, à quoi sera égal le produit des deux sections de l'une d'entre elles ?



Soient (fig. 108) les deux cordes AB, CD. Je dis que l'on a

$$AE \times BE = CE \times DE \ (\alpha).$$

Car tirons AC et BD. Les triangles ACE, BED ont les angles AEC, BED, égaux comme opposés au sommet (Tom. II, §. 515). L'angle ACD s'appuie sur le même arc AD, que l'angle ABD. Donc ils ont tous deux pour mesure la moitié de l'arc AD (Tom. II, §. 599). Donc ces deux angles sont égaux, et par conséquent les deux triangles ont deux angles égaux chacun à chacun ; donc ils sont équiangles.

Les côtés homologues des deux triangles sont donc :

Côtés du triangle ACE	AC AE CE	Côtés du triangle BED	BD DE BE	(β).

De là cette proportion,

$$AE : DE :: CE : BE \ (\gamma).$$

Donc $AE \times BE = CE \times DE$ (δ).

Ce qu'il fallait démontrer.

La proportion (γ) signifie aussi que *les parties de deux cordes qui se coupent dans un cercle sont réciproquement proportionnelles* (*). Comment forme-t-on une proportion avec les quatre parties de deux cordes qui se coupent dans un cercle ?

53. *Si une tangente et une sécante d'un cercle se rencontrent, le carré de la tangente est égal au produit de la sécante entière par sa partie extérieure.* Si une tangente et une sécante d'un cercle se rencontrent, à quoi est égal le carré de la tangente ?

Soient (fig. 109) la sécante AB et la tangente AC. Je dis que l'on aura

$$\overline{AC}^2 = AB \times AD \quad (\alpha).$$

En effet, tirons BC et CD. Les triangles ABC, ACD ont l'angle commun A. L'angle ACD du triangle ACD a pour mesure la moitié de l'arc CD (Tom. II, §. 598). L'angle ABC du triangle ABC a pour mesure la moitié du même arc : donc ces deux triangles ont deux angles égaux chacun à chacun : donc ils sont équiangles.

Les côtés homologues des deux triangles sont donc,

$$\text{Côtés du triangle ABC} \left\{ \begin{array}{l} BC \\ AC \\ AB \end{array} \right\} \begin{array}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{Côtés du triangle ACD} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \left\{ \begin{array}{l} CD \\ AD \\ AC \end{array} \right\} \quad (\beta).$$

De là, on conclut

$$AB : AC :: AC : AD \ (\gamma).$$

Donc

$$\overline{AC}^2 = AB \times AD \ (\delta).$$

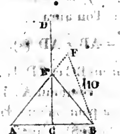
Ce qu'il fallait démontrer.

Lorsqu'une sécante et une tangente d'un cercle se rencontrent, quels sont les termes extrêmes d'une proportion continue dont le terme moyen est la tangente?

La proportion (γ) signifie aussi que *lorsqu'une sécante et une tangente d'un cercle se rencontrent, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure* (ε).

Si, par un point pris au milieu d'une droite, on élève une perpendiculaire sur cette droite, quel que soit le point que l'on considère sur cette perpendiculaire, que sera ce point relativement aux deux extrémités de la droite proposée?

54. *Si par un point pris au milieu d'une droite on élève une perpendiculaire sur cette droite, quel que soit le point que l'on considère sur cette perpendiculaire, ce point sera également éloigné des deux extrémités de la droite proposée.*



Soit (fig. 110) le point C milieu de AB, et soit menée la ligne CD perpendiculaire à AB. Je dis qu'un point quelconque E, pris sur la perpendiculaire CD sera également éloigné de A et de B, c'est-à-dire que l'on aura,

$$AE = BE.$$

Car, puisque, par hypothèse, AC est égal à BC, et que CE est perpendiculaire à AB, les triangles ACE, BCE ont un angle droit et par conséquent un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun ; donc ils sont identiques (Tom. II, §. 502); et les côtés égaux étant opposés aux angles égaux, l'on a

$$AE = BE.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

55. Corollaire. *Si, par un point pris au milieu d'une droite on élève une perpendiculaire sur cette droite, tout point situé hors de cette perpendiculaire sera inégalement éloigné des deux extrémités de cette droite.*

Si, par un point pris au milieu d'une droite, on élève une perpendiculaire sur cette droite, que sera tout point situé hors de cette perpendiculaire, relativement aux deux extrémités de cette droite ?

Soit (fig. 110) le point C milieu de AB, et soit menée la ligne CD perpendiculaire à AB. Je dis qu'un point quelconque F, pris hors de la perpendiculaire CD, sera inégalement éloigné de A et de B.

Car joignons le point A au point F par une droite qui coupe la perpendiculaire CD en un point quelconque E. Tirons ensuite BE, BF.

Dans le triangle BEF l'on a

$$BE + EF > BF \text{ (Tom. II, §. 517)} (\alpha).$$

Mais l'on a aussi (§. 54),

$$AE = BE \ (\beta).$$

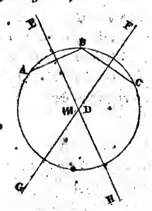
Substituant à BE du premier terme de l'équation (α) son égale AE de l'équation (β), il en résulte

$$AE + EF > BF.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Que peut-on faire passer par trois points non en ligne droite ?

56. *Par trois points donnés non en ligne droite on peut toujours faire passer une circonférence.*



Soient donnés les trois points (fig. 111) A, B, C, non en ligne droite, et joignons ces trois points par les droites AB, BC. Sur le milieu de AB élevons la perpendiculaire EH; sur le milieu de BC élevons la perpendiculaire FG, je dis que le point d'intersection D de ces deux perpendiculaires sera le centre d'une circonférence qui passera par les trois points A, B, C.

Car, puisque EH est perpendiculaire sur le milieu de AB, le point D, qui se trouve sur cette perpendiculaire est également éloigné des extrémités A et B (§ 54).

De même, puisque FG est perpendiculaire sur le milieu de BC, le point D, qui se trouve sur cette perpendiculaire, est également éloigné des extrémités B et C.

Donc le point D est également éloigné des points A, B, C.

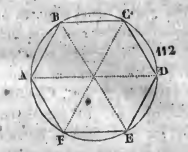
Ce qu'il fallait démontrer.

57. Corollaire. *Donc par trois points donnés non en ligne droite on ne peut faire passer qu'une seule circonférence.* Peut-on faire passer plus d'une circonférence par trois points donnés non en ligne droite ?

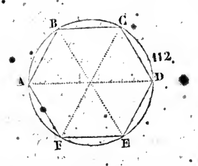
Car, si une seconde circonférence passait par les trois points donnés A, B, C de la figure 111, son centre ne pourrait être hors de la perpendiculaire EH, puisque s'il était dehors, il serait inégalement éloigné de A et de B (§. 55). Ce centre ne pourrait non plus être hors de la perpendiculaire FG, puisque dans ce cas il serait inégalement éloigné de F et de G (§. 55). Donc ce centre serait nécessairement le point d'intersection de ces deux perpendiculaires. Donc cette prétendue seconde circonférence se confondrait avec l'autre, et par conséquent il n'y aurait qu'une seule et même circonférence.

Ce qu'il fallait démontrer.

58. *Tout polygone régulier peut être inscrit dans le cercle, c'est-à-dire que tous ses sommets sont également éloignés du centre du cercle circonscrit.* Quelle est la propriété de tout polygone régulier, relativement au cercle ?



Soit (fig. 112) le polygone régulier ABCDEF, et partageons les angles ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB en deux parties égales; puis-



que ces angles sont égaux (§. 46, note), leurs moitiés AB*o*, *o*BC, BC*o*, *o*CD, CD*o*, *o*DE, DE*o*, *o*EF, EF*o*, *o*FA, FA*o*, *o*AB sont égales.

Or, nous pouvons (§. 56) faire passer une circonférence par les trois points ABC. Soit *o*, le centre de cette circonférence, et tirons A*o*, B*o*, C*o*. Les triangles A*o*B, B*o*C seront identiques.

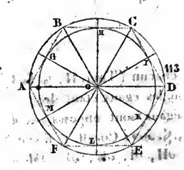
Joignons aussi D*o*, E*o*, F*o*. Les triangles C*o*D, D*o*E, E*o*F, F*o*A seront identiques, avec le triangle A*o*B. Car ces triangles ont d'abord un côté égal, savoir celui du polygone; ils ont de plus deux angles égaux adjacens à ce polygone, puisque ces angles sont la moitié d'angles égaux; donc ces triangles sont identiques (T. II, §. 503), et les côtés égaux sont opposés aux angles égaux (Tom. II, §. 502, Corollaire). Donc les côtés *o*C, *o*D, *o*E, *o*F sont égaux. Mais le côté *o*C est, par construction, rayon de la circonférence qui passe par les trois points A, B, C. Donc les côtés *o*D, *o*E, *o*F sont aussi des rayons de cette même circonférence. Donc tous les sommets du polygone ABCDEF sont sur la cir-

conférence dont o est le centre. Donc ce polygone est inscrit dans un cercle.

Ce qu'il fallait démontrer.

59. *Tout polygone régulier peut être circonscrit au cercle* (1).

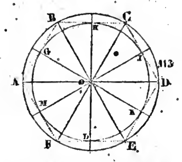
Quelle est la propriété de tout polygone régulier, relativement au cercle ?



Soit (fig. 113) l'hexagone régulier ABCDEF inscrit dans le cercle désigné par les mêmes lettres. Je dis qu'on peut lui inscrire (2) le cercle GHIKLM, c'est-à-dire que tous ses côtés seront des tangentes de ce cercle.

En effet, menons, dans le grand cercle, les rayons oA, oB, oC, oD, oE, oF. Conduisons ensuite du centre o les lignes oG, oH, oI, oK, oL, oM au milieu des côtés du polygone : ces lignes seront perpendiculaires à ces côtés (T. II, §. 587); puisque ces côtés sont des cordes d'un cercle, il en résultera douze triangles identiques, rectangles au milieu des côtés du polygone inscrit, identiques, parce que par construction ils ont la base égale adjacente à deux angles égaux

(1) Voyez la définition, Tom. II, §. 482.
(2) Voyez la définition, Tom. II, §. 483.



chacun à chacun (Tom. II, §. 503), l'un de ces deux angles égaux étant droit ; et comme les angles égaux sont opposés aux côtés égaux (Tom. II, §. 502, Coroll.), il s'ensuit que les côtés *o*G, *o*H, *o*I, *o*K, *o*L, *o*M sont égaux. Donc, si avec une ouverture de compas égale à *o*G, je décris une circonférence, elle passera par les points G, H, I, K, L, M.

Mais nous venons de voir que les côtés AB, BC, CD, DE, EF, FA de notre polygone sont perpendiculaires à *o*G, *o*H, *o*I, *o*K, *o*L, *o*M qui sont des rayons de la circonférence GHIKLM. Donc (Tom. II, §. 592) ces côtés sont des tangentes à cette circonférence.

Donc le polygone ABCDEF est circonscrit au cercle GHIKLM (Tom. II, §. 482).

Ce qu'il fallait démontrer (1).

Qu'appelle-t-on centre d'un polygone régulier ?

(1) On appelle *centre* d'un polygone régulier le centre du cercle inscrit.

Qu'est-ce que l'apothème ?

On donne le nom d'*apothème* à la perpendiculaire abaissée du centre d'un polygone régulier sur un de ses côtés.

A quelle ligne est égale l'apothème ?

L'apothème est égale au rayon du cercle inscrit.

60. *La surface d'un polygone régulier est égale au produit de son périmètre par la moitié du rayon du cercle inscrit.* Quelle est la mesure de la surface d'un polygone régulier circonscrit à un cercle ?

Soit (fig. 113) le polygone régulier ABCDEF inscrit dans le cercle désigné par les mêmes lettres, et conduisons les rayons oA, oB, oC, oD, oE, oF : on formera ainsi six triangles identiques et équilatéraux, dont la surface sera égale au produit de la base par la moitié de la hauteur (§. 6) ; or, la hauteur de chacun de ces triangles est l'apothême (§. 59) ou rayon du cercle inscrit.

Appelons π l'apothême ; nous aurons alors pour la surface de ces triangles $AoB \times \overline{1/2\pi} + BoC \times \overline{1/2\pi} + CoD \times \overline{1/2\pi} + DoE \times \overline{1/2\pi} + EoF \times \overline{1/2\pi} + FoA \times 1/2\pi$, c'est-à-dire $(AoB + BoC + CoD + DoE + EoF + FoA)\ \overline{1/2\pi}$.

Ce qu'il fallait démontrer.

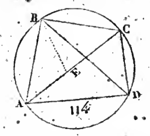
61. Corollaire. Donc *la surface d'un triangle est égale à son périmètre multiplié par la moitié du rayon du cercle inscrit.* Quelle est la mesure de la surface d'un triangle circonscrit à un cercle ?

62. Corollaire II. Puisqu'un cercle peut être considéré comme un polygone régulier d'un nombre infini de côtés (§. 47), il s'ensuit (§. 60) que *la surface d'un cercle est égale au produit de sa circonférence par la moitié du rayon.* Quelle est la mesure de la surface d'un cercle ?

63. Corollaire III. Donc *la surface d'un secteur a pour mesure le produit de ce secteur par la moitié du rayon.* Quelle est la mesure de la surface d'un secteur ?

Dans tout quadrilatère inscrit, à quoi est égal le produit des deux diagonales ?

64. *Dans tout quadrilatère inscrit le produit des deux diagonales est égal à la somme des deux produits des côtés opposés.*



Soit (fig. 114) le quadrilatère inscrit ABCD, je dis que l'on a

$$AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD.$$

En effet, par le point B menons une droite BE qui fasse avec la droite AB un angle ABE égal à l'angle CBD. Les deux triangles BCD, ABE seront équiangles, car les angles CBD, ABE sont égaux par construction; les angles inscrits BDC, BAE sont égaux comme s'appuyant sur le même arc BC (Tom. II, §. 601) (1). Donc, le troisième angle BCD de l'un est égal au troisième angle AEB de l'autre.

Voici le tableau des angles et des côtés homologues des deux triangles BCD, ABE.

(1) J'ai déjà dit que la longueur des jambes d'un angle n'influe pas sur la grandeur de l'angle. Or, on voit que le côté AE étant prolongé, aboutit au point C, une des extrémités de l'arc BC.

ANGLES HOMOLOGUES.

Triangle BCD	ang. CBD . . . . ang. ABE		Triangle ABE.
	ang. BDC . . . . ang. BAE		
	ang. BCD . . . . ang. AEB		

CÔTÉS HOMOLOGUES.

Triangle BCD	CD . . . . AE		Triangle ABE.
	BC . . . . BE		
	BD . . . . AB		

De là résulte cette proportion :

CD : AE : : BD : AB (α).

Donc (Tom. I[er]., §. 344).

CD × AB = AE × BD (β).

De même, les deux triangles ABD, BCE sont équiangles ; car les angles inscrits ADB, BCE sont égaux comme s'appuyant sur le même arc AB (Tom. II, §. 601). Les angles ABD, CBE sont aussi égaux comme composés de parties égales ; car la partie EBD est commune, et la partie ABE est, par construction, égale à la partie CBD. Donc le troisième angle BAD de l'un est égal au troisième angle BEC de l'autre.

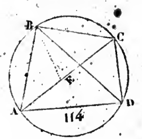
Tableau des angles et des côtés homologues des deux triangles ABD, BCE.

ANGLES HOMOLOGUES.

Triangle ABD	ang. ADB . . . . ang. BCE		Triangle BCE.
	ang. ABD . . . . ang. CBE		
	ang. BAD . . . . ang. BEC		

CÔTÉS HOMOLOGUES.

Triangle ABD	AB . . . . BE		Triangle BCE.
	AD . . . . CE		
	BD . . . . BC		



De là naît cette proportion :

$$AD : CE :: BD : BC \ (\gamma).$$

Donc (Tom. Ier., §. 344)

$$AD \times BC = CE \times BD \ (\delta).$$

Ajoutant le premier membre de l'équation (δ) au premier membre de l'équation (β), et le second membre de l'équation (δ) au second membre de l'équation (β), ce qui (Tom. II, §. 4), ne détruit pas l'équation, on obtient

$$CD \times AB + AD \times BC = AE \times BD + CE \times BD (\varepsilon).$$

Mais $AE \times BD + CE \times BD$ peut se mettre sous la forme

$$(AE + CE) \times BD.$$

Et $AE + CE$ est égal à AC. D'où résulte

$$CD \times AB + AD \times BC = AC \times BD \ (\zeta).$$

Ce qu'il fallait démontrer.

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE.

65. *Partager une droite en deux parties égales.*

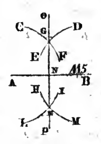
Comment partage-t-on une ligne en deux parties égales ?

On partage une droite en deux parties égales en prenant une ouverture quelconque de compas, mais plus grande que la moitié de cette droite (1), et portant l'une des deux pointes sur chaque extrémité de la droite pour décrire avec l'autre pointe deux arcs qui se coupent de part et d'autre de la droite proposée. La ligne qui joindra les deux points d'intersection des arcs, partagera cette droite en deux parties égales.

Soit (fig. 115) la ligne AB qu'il s'agit de partager en deux parties égales. Du point A, et avec une ouverture de compas à volonté, mais plus grande que la moitié de AB, je décris l'arc CF. Du point B, et avec la même ouverture de compas, je décris l'arc CF qui coupera l'arc DE en un point G.

Ensuite du point A, et d'une ouverture de compas plus grande que la moitié de la ligne

(1) Si l'ouverture du compas n'était pas plus grande que la moitié de la droite, les arcs ne pourraient pas se couper.



AB, je décris de l'autre côté de cette ligne l'arc IL. Du point B, et avec la même ouverture de compas, je décris l'arc HM, qui coupera l'arc IL en un point K.

Je joins les deux points d'intersection G, K par la droite OP, qui partagera la ligne proposée AB en deux parties égales au point N.

Car, puisque j'ai décrit les arcs CF, DE avec une même ouverture de compas, le point d'intersection G est également éloigné de A et de B.

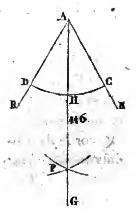
De même, puisque j'ai décrit les arcs IL, HM, avec une même ouverture de compas, le point d'intersection K est également éloigné de A et de B.

Donc la droite OP contient deux points G, K, dont chacun est également éloigné de A et de B; donc ils doivent se trouver tous deux sur la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB (§. 54). Mais par deux points donnés on ne peut faire passer qu'une seule ligne droite (T. II, §. 496). Donc la droite OP est cette perpendiculaire: donc le point N, commun à la droite AB et à la droite OP, est le milieu de la droite AB. *Ce qu'il fallait trouver et démontrer.*

Comment partage-t-on un angle en deux parties égales ?

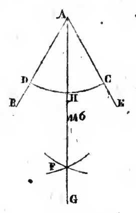
66. *Partager un angle en deux parties égales.* *Pour partager un angle en deux parties*

égales, on commence par décrire un arc entre les jambes de l'angle avec une ouverture de compas à volonté. Ensuite, avec une ouverture de compas quelconque, et prenant pour centre chaque extrémité de l'arc, on décrit deux arcs qui se coupent. La droite qui joindra le sommet de l'angle proposé et le point d'intersection des deux arcs partagera cet angle en deux parties égales.



Soit proposé (fig. 116) de partager l'angle BAE en deux parties égales. Du sommet A comme centre je décris l'arc DC. Des points D et C comme centres je décris deux arcs qui se coupent au point F, et je tire la droite AG. Je dis que cette droite coupera l'arc DC en deux parties égales au point H, et que par conséquent elle coupera l'angle proposé BAE en deux parties égales.

En effet, le point A est, par construction, également éloigné de D et de C. Le point F est aussi, par construction, également éloigné des



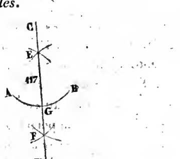
mêmes points D et C. Donc la droite AG contient deux points A et F, dont chacun est également éloigné de D et de C; donc ils doivent se trouver tous deux sur la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde de l'arc DC (§. 54). Mais par deux points donnés on ne peut faire passer qu'une seule ligne droite (Tom. II, §. 496). Donc la droite AG est une perpendiculaire qui passe par le milieu de la corde de l'arc DC, et par conséquent par le milieu H de cet arc (T. II, §. 587), puisque A est le centre du cercle auquel appartient l'arc DC. Donc l'arc DH est égal à l'arc CH. Mais dans le même cercle les arcs égaux répondent à des angles au centre égaux (Tom. II, §. 603 *bis*); donc l'angle DAH est égal à l'angle CAH. Donc l'angle BAE est partagé en deux parties égales par la droite AG.

Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

67. *Partager un arc en deux parties égales.*

On partage un arc en deux parties égales en prenant une ouverture de compas plus grande que la moitié de la corde de cet arc, et portant l'une des deux pointes sur chaque extrémité de l'arc pour décrire avec l'autre pointe deux arcs qui se coupent de part et d'autre de l'arc proposé. La droite qui joint les deux points d'intersection des arcs partage l'arc proposé en deux parties égales.

Comment partage-t-on un arc en deux parties égales ?



Soit (fig. 117) l'arc AB. Pour le partager en deux parties égales, je décris de ses extrémités A et B comme centres deux arcs qui se coupent de part et d'autre en E et F, et par ces deux points je mène la droite CD. Cette droite partagera l'arc proposé AB en deux parties égales au point G.

Car le point E est, par construction, également éloigné de A et de B. Le point F est aussi, par construction, à égale distance de A et de B. Donc la droite CD a deux points E et F, dont chacun est également éloigné de A et de B; donc ils doivent se trouver tous deux sur la perpendiculaire élevée au milieu de la corde de l'arc AB (§. 54). Mais par deux points donnés



on ne peut faire passer qu'une seule ligne droite (Tom. II, §. 496). Donc la droite CD est une perpendiculaire qui passe par le milieu de la corde de l'arc AB. Cette perpendiculaire passe aussi par le centre du cercle auquel appartient l'arc AB, puisque la perpendiculaire abaissée du centre de ce cercle sur la corde de l'arc AB doit passer par le milieu de cette corde (Tom. II, §. 585), et que l'on ne peut élever qu'une perpendiculaire sur une même ligne d'un même point donné sur cette ligne (Tome II, §. 583). Donc la droite CD passe aussi par le milieu G de l'arc AB (Tom. II, §. 587). Donc elle partage l'arc AB en deux parties égales au point G.

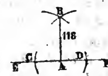
Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

68. *A un point donné d'une droite élever une perpendiculaire sur cette droite.*

Comment élève-t-on une perpendiculaire sur une ligne à un point donné de cette ligne?

On élève une perpendiculaire sur une ligne à un point donné de cette ligne en prenant une ouverture de compas convenable et portant l'une des pointes sur le point donné pour décrire de l'autre deux arcs de cercle qui coupent la ligne donnée en deux points.

Des deux points d'intersection comme centres, et avec une ouverture de compas à volonté, on décrit ensuite en dessus ou en dessous de la droite proposée deux arcs qui se coupent. La ligne qui joint le point d'intersection et le point donné sera la perpendiculaire demandée.



Soit (fig. 118) la droite EF. Soit donné sur cette droite le point A. De ce point comme centre, et avec une même ouverture de compas, je décris deux arcs qui coupent cette droite aux points C et D. Des points C et D, comme centre, je décris avec un rayon à volonté deux arcs qui se coupent au point B. Je dis que la droite qui joint les points A et B est la perpendiculaire demandée.

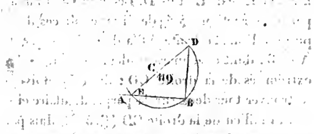
Car le point A est, par construction, également éloigné de C et de D. Le point C est aussi, par construction, à égale distance de ces deux points. Donc la droite AB a deux de ses points A et B, dont chacun est également éloigné des extrémités de la droite CD : donc ils doivent se trouver tous deux sur la perpendiculaire élevée au milieu de la droite CD (§. 54). Mais par deux points donnés on ne peut faire passer qu'une seule ligne droite (Tom. II, §. 496). Donc la droite AB est une perpendiculaire qui passe par le milieu de la droite CD. Donc la droite AB est perpendiculaire à la droite EF au point donné A.

Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

69. D'un point donné à l'extrémité d'une droite élever une perpendiculaire sur cette droite.

Comment d'un point donné à l'extrémité d'une droite élève-t-on une perpendiculaire sur cette droite?

Pour élever, d'un point donné à l'extrémité d'une droite, une perpendiculaire sur cette droite, on prend à volonté un point au-dessus ou au-dessous de la droite proposée. Ensuite, de ce point comme centre, et d'une ouverture de compas égale à la distance de ce point à l'extrémité de la droite où doit s'élever la perpendiculaire, on décrit un arc indéfini plus grand que la demi-circonférence, et qui coupe en un point quelconque la droite proposée; après quoi on mène une droite par le point d'intersection et le centre jusqu'à ce qu'elle rencontre l'arc indéfini. Cette droite sera le diamètre de l'arc décrit, et la droite qui joindra le point de rencontre et le point par où doit s'élever la perpendiculaire, sera la perpendiculaire demandée.



Soit proposé (fig. 119) d'élever une perpendiculaire à la droite AB à son extrémité B. Du point C comme centre, et d'un rayon égal à CB, je décris un arc indéfini qui coupe la droite AB en un point quelconque E. Par les points E, C

je mène une droite ED qui rencontre l'arc indéfini au point D. Je tire la droite BD : cette droite est la perpendiculaire demandée.

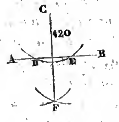
Car les rayons CE, CD forment le diamètre DE. Donc l'angle inscrit ABD est un angle droit (Tom. II, §. 602). Donc la droite BD est perpendiculaire à la droite AB (Tom. II, §. 423).

Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

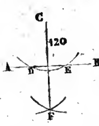
70. ***D'un point donné hors d'une droite abaisser une perpendiculaire sur cette droite.***

Comment d'un point donné hors d'une droite, abaisse-t-on une perpendiculaire sur cette droite?

Pour abaisser d'un point donné hors d'une droite une perpendiculaire sur cette droite, LORSQUE LA POSITION DU POINT DONNÉ LE PERMET, *on décrit de ce point, et avec une ouverture de compas convenable, un arc de cercle qui coupe la ligne proposée en deux points. De ces deux points comme centres on décrit deux arcs qui se coupent de l'autre côté de la droite en question. La droite qui joint le point d'intersection de ces deux arcs au point proposé, sera la perpendiculaire demandée.*



Soit (fig. 120) la droite AB, et soit donné le point C duquel il s'agit d'abaisser une perpen-



diculaire sur cette droite. Du point C comme centre, je décris l'arc DE qui coupe la droite AB aux points D et E. Des points D et E comme centres je décris deux arcs qui se coupent au point F, et je tire CF. Je dis que CF est perpendiculaire à AB.

Car le point C est, par construction, également éloigné de D et de E. Le point F est aussi, par construction, également éloigné de D et de E. Les deux points C, F appartiennent donc à la perpendiculaire élevée au milieu de DE (§. 54); mais d'un point à un autre on ne peut mener qu'une seule ligne droite; donc la droite CF est perpendiculaire à DE, et par conséquent à AB.

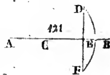
Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

71. *D'un point donné hors d'une droite, lorsque ce point est dans une position à ne pouvoir servir de centre à un arc qui coupe cette droite en deux points, abaisser une perpendiculaire sur cette droite.*

Comment, d'un point donné hors d'une droite, lorsque ce point est placé de manière à ne pouvoir servir de centre à un arc qui coupe cette droite en deux points, abaisse-t-on une perpendiculaire sur cette droite?

Pour abaisser une perpendiculaire sur une droite, d'un point donné hors de cette droite, lorsque ce point est dans une position à ne pouvoir servir de centre à un arc qui coupe cette

droite en deux points, on prend sur cette droite un point à volonté comme centre, et avec une ouverture de compas égale à la distance de ce point au point donné, on décrit du point donné un arc qui coupe la droite proposée, arc que l'on prolonge au-dessous de cette droite d'une quantité égale à celle qui est au-dessus, après quoi on joint les deux extrémités de cet arc par une droite qui sera la perpendiculaire demandée.



Soit proposé (fig. 121) d'abaisser du point D une perpendiculaire à AB. Du point C pris à volonté comme centre sur AB, et d'une ouverture de compas égale à CD, je décris l'arc DE que je prolonge d'une quantité égale jusqu'en F, et je tire DF qui sera la perpendiculaire demandée.

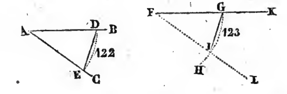
Car, puisque le point E est, par construction, le milieu de l'arc DEF, et que le point C est le centre de cet arc, le rayon CE est perpendiculaire au milieu de la corde DF (T. II, §. 587).

Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

72. *A un point donné sur une droite faire un angle égal à un angle donné.*

Pour faire, à un point donné sur une droite, un angle égal à un angle donné, il faut, du sommet de l'angle donné, comme centre, dé- Comment à un point donné sur une ligne fait-on un angle égal à un angle donné?

crire un arc entre les côtés de cet angle; ensuite du point donné de la droite proposée comme centre, et avec la même ouverture de compas, décrire un arc indéfini qui parte de la droite proposée; prendre sur cet arc indéfini une portion égale à l'arc de l'angle donné, et joindre par une droite le point donné et l'extrémité de cet arc. La droite qui joint ces deux points formera avec la droite proposée l'angle cherché.



Soit (fig. 122) l'angle BAC, et soit proposé de faire au point F de la droite FK (fig. 123) un angle qui lui soit égal. Du point A comme centre, et d'un rayon à volonté, je décris l'arc DE du point F comme centre, et avec un même rayon je décris l'arc indéfini GIH. Je prends sur cet arc indéfini une portion GI égale à l'arc DE, et je mène FL. Je dis que l'angle KEL est égal à l'angle BAC.

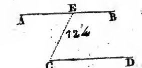
Car, puisque les arcs DE, GI ont été décrits avec le même rayon, et que d'ailleurs GI est égal à DE par construction, il s'ensuit que les triangles ADE, FGI ont les trois côtés égaux chacun à chacun, et que par conséquent ils sont identiques (Tom. II, §. 508), et comme dans les triangles identiques les angles égaux sont opposés aux côtés égaux (Tom. II, §. 502, Corollaire), l'angle KFL est égal à l'angle BAC.

Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

73. *Par un point donné mener une parallèle à une droite donnée.*

Pour mener, par un point donné, une parallèle à une droite donnée, il faut, du point donné, conduire une droite à un point quelconque de la droite proposée, et au point donné faire un angle égal à son alterne-interne.

Comment mène-t-on par un point donné une parallèle à une ligne donnée?



Soit (fig. 124) la droite AB, à laquelle il s'agit de mener une parallèle du point C. Je tire du point C une droite qui aille aboutir à un point quelconque E de la droite AB. Au point C je fais un angle DCE égal à l'angle AEC. Ces deux angles étant égaux comme alternes-internes, il s'ensuit (Tom. II, §. 529) que la droite CD est parallèle à la droite AB.

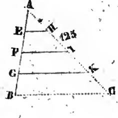
Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

74. *Partager une droite donnée en un nombre quelconque de parties égales.*

On partage une droite donnée en un nombre quelconque de parties égales, en faisant à une des extrémités de la droite donnée un angle quelconque avec une droite indéfinie sur laquelle on porte une ouverture de compas égale à une des parties autant de fois que l'on désire avoir de parties égales. On joint l'extrémité de la dernière partie avec l'autre extrémité de la

Comment partage-t-on une droite donnée en un nombre quelconque de parties égales?

droite donnée par une droite pour faire un triangle dont elle sera la base, et à chaque point d'intersection on mène une parallèle à cette base. Les parties de la droite donnée comprises entre ces parallèles seront les parties égales demandées.



Soit (fig. 125) la droite AB. Pour la partager en parties égales, en quatre, par exemple, je mène la ligne indéfinie AD, sur laquelle je porte quatre fois une ouverture de compas quelconque AH, et je joins le dernier point de division C au point B, par la droite BC. Ensuite, par les points de division K,I,H, je mène parallèlement à BC les droites KG, IF, HE. Cela posé, je dis que les parties AE, EF, FG, GB, sont égales.

En effet, puisque, par construction, les droites EH, FI, GK, BC, sont parallèles entr'elles, il s'ensuit (§. 17) que l'on a cette suite de rapports égaux,

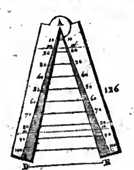
AE : AH :: EF : HI :: FG : IK :: GB : KC.

Mais dans cette suite de rapports égaux, les conséquens AH, HI, IK, KC, sont égaux par construction; donc les antécédens AE, EF, FG, GB, le sont nécessairement aussi.

Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

75. Parmi les moyens-pratiques de partager une droite donnée en un certain nombre de parties égales, il en est un extrêmement commode, que l'on doit au *compas de proportion*.

A quel instrument entr'autres doit-on les moyens de partager une ligne droite en un certain nombre de parties égales?



Le compas de proportion (fig. 126) est fondé sur le principe que les triangles équiangles ont les côtés homologues proportionnels, et sont par conséquent semblables.

Sur quel principe est fondé le compas de proportion?

Cet instrument est un secteur (Tom. II, §. 463), et se compose de deux règles égales (ou jambes) ordinairement en cuivre, rivées l'une à l'autre, mais de manière à pouvoir tourner librement sur leur charnière.

De quoi se compose le compas de proportion?

Sur les faces de cet instrument, et sur chaque jambe, sont tracées plusieurs lignes dont les principales sont la ligne des parties égales (ou rayon du secteur) et la ligne des cordes.

Quelles lignes sont tracées sur les faces du rapporteur?

La ligne des parties égales contient les divisions numérotées de 10 en 10, jusqu'à 100 ou 200, suivant la dimension de l'instrument.

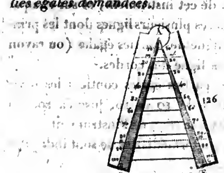
Les divisions intermédiaires ne sont indiquées que par des points.

76. *Partager, avec le compas de proportion,*

une droite donnée en un nombre quelconque de parties égales.

Comment partage-t-on avec le compas de proportion, une droite donnée en un nombre quelconque de parties égales?

Pour partager, avec le compas de proportion, une droite donnée en un nombre quelconque de parties égales, on prend la ligne donnée avec un compas ordinaire; on jette ensuite les yeux sur une portion de la ligne des parties égales (de l'une des jambes) comprise entre le centre de l'instrument et une division telle que cette étendue soit UN MULTIPLE DU NOMBRE *qui indique en combien de parties égales on doit partager la droite proposée. Ayant conservé l'ouverture du compas ordinaire, on fixe l'une des pointes sur cette division; on ouvre après cela suffisamment le compas de proportion pour que l'autre pointe puisse s'appliquer sur pareille division de l'autre jambe. Laissant le compas de proportion dans cette ouverture, on prend la distance qui existe entre les deux nombres égaux de chaque jambe qui sont l'un des deux facteurs du multiple sus-mentionné : cette distance sera une des parties égales demandées.*

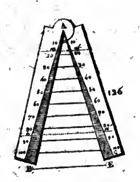


Soit (fig. 126) le compas de proportion BAC, dont le centre est A, et dont les rayons AB, AC, sont partagés en 100 parties égales; et soit proposé de partager la droite DE en cinq parties d'égale longueur.

Je prends, avec un compas ordinaire, une grandeur égale à la droite proposée DE. Je porte une des pointes de ce compas sur une division quelconque qui soit multiple de 5, par exemple sur 85, et j'ouvre le compas de proportion jusqu'à ce que l'autre pointe aille tomber sur la division 85 de l'autre jambe. Conservant cette ouverture du compas de proportion, je prends avec le compas ordinaire la distance qui se trouve entre le quotient de 85 divisé par 5 sur l'une des jambes et ce même quotient placé sur l'autre jambe. Ce quotient est 17. La distance qui existe entre 17 d'un côté et 17 de l'autre, est la partie qu'il faut porter cinq fois sur la droite proposée DE, pour que cette droite soit partagée en cinq parties égales (1).

En effet, puisque Am' ou 17 est la cinquième partie de An' ou 85, il s'ensuit que mm' est la cinquième partie de nn'. Car les triangles mAm', nAn' sont semblables, attendu qu'ils ont d'abord l'angle commun A, que les côtés An, An' sont, par

(1) Je n'ai pas écrit 17 sur la figure, non plus que 85; mais il suffit, pour savoir où se trouvent ces nombres, de compter les points qui sont entre 10 et 20, entre 80 et 85.



hypothèse, partagés en parties égales ; que par conséquent (§. 18) la droite mm' est parallèle à nn', et qu'ainsi les deux triangles mAm', nAn' ont les deux autres angles égaux chacun à chacun (Tom. II, §. 524). Voici le tableau de leurs angles et côtés homologues.

ANGLES HOMOLOGUES.

Triangle Amm'	A	A	Triangle Ann'.
	Amm'	Ann'	
	$Am'm$	$An'n$	

CÔTÉS HOMOLOGUES.

Triangle Amm'	mm'	nn'	Triangle Ann'.
	Am'	An'	
	Am	An	

De là résulte cette proportion :

$$Am : An :: mm' : nn'.$$

Mais Am est la cinquième partie de An ; donc mm' est la cinquième partie de nn'.

Mais, par hypothèse, la droite nn' est égale à la droite proposée DE. Donc la droite mm' est la cinquième partie de la droite proposée DE.

Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

77. On nomme *échelle des dixmes*, plusieurs lignes parallèles divisées en un certain nombre de parties égales. Parmi ces parties égales, les unes représentent l'unité, les autres, la collection de dix unités, ou des multiples de dix unités.

Qu'appelle-t-on échelle des dixmes ?

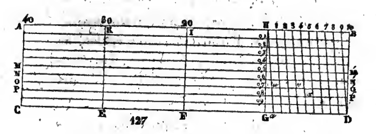
Une droite tirée obliquement détermine les dixièmes d'unité, et c'est ce qui lui a fait donner le nom d'échelle des dixmes.

Comment, dans une échelle des dixmes, détermine-t-on les dixièmes d'unité ?

78. *Construire une échelle des dixmes.*

Pour construire une échelle des dixmes, on trace une ligne indéfinie, sur laquelle on porte dix fois une même ouverture de compas; on prend ensuite la distance collective de ces dix ouvertures, que l'on porte un certain nombre de fois, à volonté, par exemple, trois fois, sur cette ligne indéfinie. Des points de section, on mène à cette ligne des perpendiculaires égales à cette ouverture de compas, et l'on joint les extrémités de ces perpendiculaires par une droite; ce qui forme quatre carrés. Aux points de division du premier carré qui a été partagé en dix parties égales, on mène dix parallèles verticales qui aboutissent à la ligne inférieure, à des distances égales à chacune des dix divisions. La première et la dernière de ces parallèles forment l'hypoténuse d'un triangle rectangle. Cela étant fait, on termine l'échelle en menant des parallèles horizontales qui aient entr'elles la même distance que les parallèles verticales.

Comment construit-on une échelle des dixmes ?



Soit (fig. 127) la droite indéfinie AB. J'en prends une portion BH, que je partage en dix parties égales aux points 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, H. Je porte ensuite la longueur BH sur 20, 30 et 40, et je termine ma ligne indéfinie au point A. J'abaisse aux points de section B, H, 20, 30, 40, des perpendiculaires égales, et je joins leurs extrémités C, E, F, G, D, par une droite CD. Des points de division H, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, je mène à G D des droites à des distances égales à celles des points de division, et par conséquent ces droites seront parallèles.

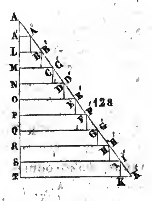
Enfin, je partage le rectangle total ABDC en dix rectangles partiels, en menant entre AB et CD des parallèles à des distances égales à celles des dix points de division du premier carré.

Par cette construction, le côté HG et l'hypoténuse H*a* du triangle rectangle HG*a* sont coupés respectivement en parties égales, et chaque partie est un dixième du côté.

De ce que chaque partie est un dixième du côté, il suit que chaque portion de la parallèle horizontale comprise entre les deux côtés du triangle rectangle surpasse d'un dixième la por-

tion qui précède, et que la première portion interceptée entre les deux côtés de ce même triangle est égale au dixième de la dixième partie du côté du triangle rectangle qui est perpendiculaire à la base G*a*.

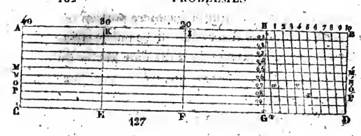
Pour rendre cette vérité plus sensible, représentons le triangle rectangle GH*a* par le triangle de plus grande dimension TAK' (fig. 128), rectangle en T.

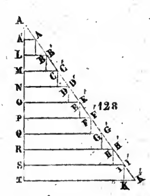


Divisons la droite AT en dix parties égales aux points A', L, M, N, O, P, Q, R, S, T, et par ces points de division menons les parallèles à la base TK' les lignes A'A'', LB', MC', ND', OE', PF', QG', RH', SI'.

Puisque par hypothèse A'A'' est parallèle à la base TK', il s'ensuit que les angles AA'A'', ATK' sont égaux comme internes-externes (Tom. II, §. 524), ainsi que les angles A, A'', A'. Donc les triangles AA'A'', ATK' sont semblables, et les angles et côtés homologues se trouvent déterminés par le tableau suivant.







ANGLES HOMOLOGUES.

Triangle AA'A''	A . . . . A		Triangle ATK'.
	AA'A'' . . . . ATK'		
	AA''A' . . . . AK'T		

CÔTÉS HOMOLOGUES.

Triangle AA'A''	A'A'' . . . . TK'		Triangle ATK'.
	AA'' . . . . AK'		
	AA' . . . . AT		

De là résulte cette proportion :

$$AA' : AT :: A'A'' : TK'.$$

Mais AA' est, par hypothèse, la dixième partie de AT. Donc A'A'' est la dixième partie de TK'.

Donc si TK', base du triangle rectangle de la figure 128, était égal à la dixième partie du côté perpendiculaire du triangle rectangle, comme

c'est le cas de la base du triangle rectangle de la figure 127, où cette base est prise pour l'unité, AA' serait la dixième partie de la dixième partie du côté perpendiculaire du triangle rectangle.

Premier point qu'il fallait démontrer.

Il s'agit maintenant de prouver que chaque portion de la parallèle horizontale comprise entre les deux côtés du triangle rectangle surpasse d'un dixième la portion qui précède, en prenant pour unité la base du triangle.

Pour cela je mène au côté AT (fig. 128), les parallèles A"B, B'C, C'D, D'E, E'F, F'G, G'H, H'I, I'K, qui formeront neuf triangles rectangles partiels identiques avec le triangle déjà formé, AA'A". En effet, les parallèles menées entre parallèles sont égales; et comme le côté AK' est, par hypothèse, partagé en dix parties égales, il s'ensuit que les dix triangles rectangles partiels AA'A", etc., ont deux côtés égaux; donc ils sont identiques (Tom. II, §. 572), et le troisième côté est égal au troisième. Donc les côtés A'A", BB', CC', DD', EE', FF', GG', HH', II', KK' sont égaux.

De là résulte cette progression par différence dont la raison est un dixième, et dont le premier terme est égal à la raison:

÷ AA'. LB'. MC'. ND'. OE'. PF'. QG'. RH'. SI'. TK'.

Chaque terme étant égal à celui qui le précède, plus la raison (Tom. II, §. 178), il s'ensuit que chaque terme surpasse de la raison celui qui le précède.

Donc chaque portion de la parallèle horizontale comprise entre les deux côtés du triangle rectangle de la figure 127 surpasse d'un dixième la portion qui précède.

Ce qu'il fallait démontrer.

Maintenant, pour exprimer, par exemple, le nombre 36 au moyen de l'échelle (fig. 127), je prends la portion de la ligne AB comprise entre A et 6.

127

Mais pour représenter des unités accompagnées de dixièmes, par exemple, 33, 8, je prends P*v*, car la partie de P*v* qui va jusqu'à la rencontre de GH vaut 30; celle qui est comprise entre GH et *u* exprime 8 huitièmes, et celle qui va depuis *u* jusqu'à *v* désigne 3 unités, comme on le voit au haut de la figure.

79. *Faire au moyen du rapporteur* (1), *un angle d'un nombre de degrés donné.*

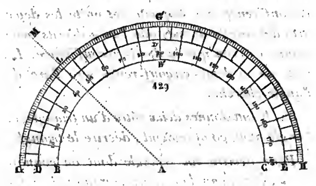
Comment fait-on, avec le rapporteur, un angle d'un nombre de degrés donné?

Pour faire, avec le rapporteur, un angle d'un nombre de degrés donné, il faut d'abord tirer une droite, placer le diamètre de l'instrument sur cette droite, y marquer le centre, qui sera

Qu'est-ce que le rapporteur?

(1) Le rapporteur est un demi-cercle sur lequel est ordinairement tracée l'ancienne division de 180 degrés. Le centre est indiqué par une petite échancrure.

le sommet de l'angle, marquer le point de l'arc qui indique le degré demandé, et de ce point conduire une ligne jusqu'au centre. Cette ligne formera avec la première l'angle demandé.



129

Soit (fig. 129) le rapporteur GG'H dont le centre est A, et soit proposé de faire un angle de 45°, je tire une ligne égale à GA; je place le rapporteur sur GA de manière que le centre tombe au point A. Je fais un point L au nombre 45, et par ce point et le centre A je mène la droite ALM. L'angle GAM est l'angle demandé.

80. *D'un point donné sur une ligne, élever, au moyen du rapporteur, une perpendiculaire sur cette ligne.*

Pour élever, avec le rapporteur, d'un point donné sur une ligne, une perpendiculaire à cette ligne, on place le diamètre du rapporteur sur cette ligne, et le centre sur le point donné; ensuite on marque un point à l'endroit du papier où vient aboutir le numéro 90. On tire par ce point et le centre une ligne droite qui sera la perpendiculaire demandée.

Comment, au moyen du rapporteur, d'un point donné sur une ligne, élève-t-on une perpendiculaire sur cette ligne?

81. *Étant donnés deux angles d'un triangle, trouver le troisième.*

Connaissant deux angles d'un triangle, comment obtient on le troisième ?

Pour trouver le troisième angle d'un triangle quand on en connaît deux, on trace une demi-circonférence sur laquelle on porte les deux arcs des angles donnés que l'on a décrits avec le même rayon que la demi-circonférence. Le reste de la demi-circonférence sera l'arc de l'angle cherché.

82. *Étant donnés deux côtés d'un triangle, et l'angle qu'ils comprennent, décrire le triangle.*

Comment décrit-on un triangle dont on connaît deux côtés et l'angle compris?

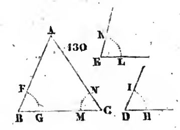
Pour décrire un triangle dont on connaît deux côtés et l'angle compris, on ouvre le compas de la grandeur de l'un des deux côtés donnés, et d'une des extrémités comme centre on décrit un arc égal à l'arc de même rayon qui mesure l'angle donné. On mène ensuite par le centre et l'extrémité de l'arc une droite égale à l'autre côté donné. La droite qui complétera le triangle sera le troisième côté cherché.

83. *Etant donnés un côté d'un triangle et les deux angles adjacens à ce côté, décrire le triangle.*

Étant donnés un côté d'un triangle et les deux angles adjacens à ce côté, comment décrit-on ce triangle?

Lorsqu'on connaît un côté d'un triangle et les deux angles adjacens à ce côté, on obtient ce triangle en décrivant de chacune des extrémités du côté donné comme centre un arc indéfini qui parte du côté donné. On prend sur chacun de ces arcs une portion égale à ceux qui mesurent les angles donnés et qui ont été décrits avec des rayons respectivement égaux. On joint enfin les

extrémités du côté donné et des arcs par deux droites qui se terminent à leur point de rencontre. On aura ainsi le triangle demandé.



Soit proposé (fig. 130) de construire un triangle ABC sur le côté donné BC, de manière que les angles qui doivent avoir leur sommet aux points B, C, soient respectivement égaux aux angles donnés E, D, savoir : l'angle B égal à l'angle E, l'angle C égal à l'angle D.

Du point B comme centre, et d'un rayon égal à celui de l'arc qui mesure l'angle E, je décris un arc indéfini, j'en prends une portion FG égale à l'arc qui mesure l'angle E, et par les points B, F je tire la droite indéfinie BA.

Ensuite, du point C, comme centre, et d'un rayon égal à celui de l'arc qui mesure l'angle D, je décris un arc indéfini, j'en prends une portion MN égale à l'arc qui mesure l'angle D, et par les points CN je tire la droite indéfinie CA. Au point de rencontre A des droites BA, CA, est formé le triangle demandé.

84. Si les deux angles donnés D, E n'étaient

pas adjacens au côté donné, comme il suffit de connaître deux angles d'un triangle pour obtenir le troisième, on chercherait le troisième angle qui serait un des deux adjacens, et la question serait ramenée au cas où l'on donne un côté et les deux angles adjacens à ce côté.

85. *Étant donnés les trois côtés d'un triangle, décrire le triangle.*

Comment décri-t-on un triangle avec trois côtés donnés?

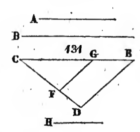
Pour décrire un triangle avec les trois côtés donnés, on prend avec le compas la grandeur d'un des trois côtés donnés. D'une des extrémités comme centre, et d'un rayon égal à l'un des deux autres côtés, on décrit un arc indéfini. De l'autre extrémité comme centre, et d'un rayon égal au troisième côté, on décrit un arc qui coupe le premier. Au point d'intersection on mène deux droites par les extrémités du premier côté. Le triangle se trouve alors formé.

86. *Trouver une troisième proportionnelle à deux lignes données.*

Comment trouve-t-on une troisième proportionnelle à deux lignes données?

Pour trouver une troisième proportionnelle à deux lignes données, on forme d'abord un angle avec ces deux lignes, on joint ensuite les deux extrémités pour former un triangle, après quoi on prend sur la plus grande ligne une portion égale à la plus petite, et du point de division on mène une parallèle à la base du triangle: la partie supérieure du côté où va tomber la parallèle sera la troisième proportionnelle de-

mandée (1), *en prenant pour premier terme de la proportion la plus grande des deux lignes proposées.*



Soit proposé (fig. 131) de trouver une troisième proportionnelle aux deux lignes A, B.

Je tire CD égal à A, et CE égal à B. Je prends sur CE une quantité CG égale à A, et du point G je mène GF parallèle à DE.

Car les triangles CED, CGF étant semblables, le côté CE homologue à CG, et le côté CD homologue à CF, on a la proportion :

CE : CG :: CD : CF (α),

ou, *alternando* (Tom. I[er]., §. 360),

CE : CD :: CG : CF (β),

Mais CG est, par construction, égal à CD.

Donc

CE : CD :: CD : CF (γ).

Donc CF est la troisième proportionnelle demandée.

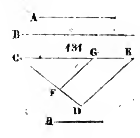
Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

(1) Il ne faut pas confondre une troisième proportionnelle à deux lignes données avec une *moyenne pro-*

87. *Chercher une quatrième proportionnelle à trois lignes données.*

Comment cherche-t-on une quatrième proportionnelle à trois lignes données?

Pour chercher une quatrième proportionnelle à trois lignes données, il faut placer les deux plus grandes de manière à faire un angle entre elles, la plus petite sur la plus grande, à partir du sommet de l'angle, et joindre par une droite les extrémités des deux premières pour former un triangle. Cela étant fait, de l'extrémité de la plus petite ligne, on mène une parallèle à la base du triangle. La partie supérieure du côté où tombe cette parallèle sera la quatrième proportionnelle demandée.



Soit proposé (fig. 131) de chercher une quatrième proportionnelle aux trois lignes A, B, H.

Je prends CE égal à B, CD égal à A; je porte H sur CD de manière à faire CF égal à H, et du point F je mène FG parallèle à DE. La ligne CG

portionnelle à deux lignes données dont il sera question ci-après; car lorsqu'on cherche une troisième proportionnelle à deux lignes données, la plus petite des deux lignes proposées est toujours la moyenne proportionnelle entre la plus grande et celle que l'on cherche.

sera la quatrième proportionnelle demandée.

Car, puisque FG est, par construction, parallèle à DE, les triangles CDE, CFG sont semblables, le côté CD homologue au côté CF, le côté CE homologue au côté CG, d'où résulte la proportion :

$$CD : CF :: CE : CG \quad (\alpha),$$

ou, *alternando* (Tom. 1er., §. 360),

$$CD : CE :: CF : CG \quad (\beta).$$

Mais on a pour construction

$$CD = A,$$
$$CE = B,$$
$$CF = H.$$

Donc enfin

$$A : B :: H : CG.$$

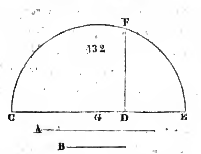
Donc CG est la quatrième proportionnelle demandée.

Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

88. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données.*

Comment trouve-t-on une moyenne proportionnelle entre deux lignes données ?

Pour trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données, il faut mettre sur une seule ligne droite les deux lignes données, et d'un rayon égal à leur demi-somme décrire une demi-circonférence qui aura pour diamètre cette même somme. Au point du diamètre où se réunissent les deux lignes proposées on élève une perpendiculaire qui va aboutir à la circonférence : cette perpendiculaire sera la moyenne proportionnelle demandée.



En effet, soit proposé (fig. 132) de trouver une moyenne proportionnelle aux deux droites données A, B. Je prends une droite CE égale à la somme de ces deux droites, sur laquelle CD = A, et DE = B. Du point G, milieu de CE, et avec une ouverture de compas égale à la moitié de CE, je décris la demi-circonférence CFE. Au point D j'élève sur CE la perpendiculaire DF qui sera la moyenne proportionnelle demandée.

Car le diamètre CE peut être considéré comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a son sommet en F, puisque tout angle inscrit qui s'appuie sur le diamètre est un angle droit (Tom. II, §. 602), et CD, DE comme les sections de l'hypoténuse, tandis que DF est la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse. Donc DF est moyenne proportionnelle entre CD et DE (§. 50).

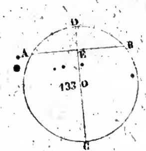
Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

89. *Trouver le centre d'un cercle donné.*

Comment trouve-t-on le centre d'un cercle donné?

Pour trouver le centre d'un cercle donné, il n'y a qu'à tirer une corde comme on voudra à la circonférence de ce cercle, et mener au mi-

lieu de cette corde une perpendiculaire qui aboutisse de part et d'autre à la circonférence. Le milieu de cette perpendiculaire sera le centre du cercle.



Soit (fig. 133) le cercle ADBC dont il s'agit de trouver le centre. Je tire une corde quelconque AB. J'élève au milieu de cette corde la perpendiculaire CD. Je dis que cette perpendiculaire est le diamètre du cercle ADBC, et que par conséquent le centre se trouve sur cette perpendiculaire.

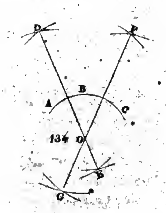
Car le rayon que l'on mènerait au milieu de cette corde serait perpendiculaire à cette corde (Tom. II, §. 584). Mais à un point donné sur une ligne on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire sur cette ligne (Tom. II, §. 583). Donc la perpendiculaire CD est le diamètre du cercle ADBC, et par conséquent le milieu de cette perpendiculaire est le centre cherché de ce cercle.

Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

90. *Trouver le centre d'un arc donné.*

Comment trouve-t-on le centre d'un arc donné?

On trouve le centre d'un arc donné en marquant trois points quelconques sur cet arc, ce qui formera deux arcs que l'on partagera en deux parties égales par deux perpendiculaires comme s'il s'agissait de partager leurs cordes : le point d'intersection de ces deux perpendiculaires sera le centre cherché.



Soit (fig. 134) l'arc ABC dont il s'agit de trouver le centre. Je partage d'abord en deux parties égales l'arc AB, comme s'il fallait partager sa corde, en décrivant de ses extrémités comme centres des arcs qui se coupent en D et E, et en joignant les deux points d'intersection par la droite DE. Je partage de la même manière l'arc BC en décrivant de ses extrémités comme centres des arcs qui se coupent aux points F et G, et en joignant les deux points d'intersection par la droite FG. Le point d'intersection des deux droites sera le centre cherché.

91. *Par trois points donnés non en ligne droite, faire passer la circonférence d'un cercle.*

Ce problème se résout comme le précédent, où il est question de chercher le centre d'un arc.

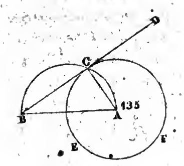
92. *Par un point donné sur la circonférence d'un cercle, mener une tangente à cette circonférence.*

Par un point donné sur la circonférence d'un cercle on mène une tangente à cette circonférence en tirant un rayon au point de contact et élevant une perpendiculaire à l'extrémité de ce rayon; cette perpendiculaire sera la tangente demandée. **Comment, d'un point donné sur la circonférence d'un cercle, mène-t-on une tangente à cette circonférence?**

Voyez la démonstration, Tom. II, §. 592.

93. *D'un point hors d'une circonférence mener une tangente à cette circonférence.*

Pour mener d'un point donné hors d'une circonférence, une tangente à cette circonférence, on mène du point donné une droite au centre du cercle; du milieu de cette droite et d'un rayon égal à la moitié de cette droite, on décrit une demi-circonférence dont cette droite sera le diamètre. Le point d'intersection de cette demi-circonférence et de la circonférence proposée sera le point de contact par lequel il faudra mener la tangente. **Comment mène-t-on une tangente à une circonférence, d'un point donné hors de cette circonférence?**



Soit (fig. 135) donné le point B hors de la circonférence CEF, et soit proposé de mener de ce point une tangente à cette circonférence : je joins ce point au centre A par la droite BA. Avec une ouverture de compas égale à la moitié de BA je décris la demi-circonférence BCA. Au point d'intersection C je mène BC et AC. Je dis que BC est la tangente demandée.

Car l'angle BCA est un angle inscrit qui s'appuie sur le diamètre BCA; donc il est droit (Tom. II, §. 602), et par conséquent BC est perpendiculaire à l'extrémité du rayon AC. Donc BC est une tangente à la circonférence CEF (Tom. II, §. 592).

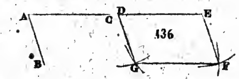
Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

94. *Les deux côtés adjacens d'un parallélogramme étant donnés, avec l'angle qu'ils comprennent, tracer le parallélogramme.*

Les deux côtés adjacens d'un parallélogramme étant donnés, avec l'angle qu'ils comprennent, comment tracet-on le parallélogramme?

Pour tracer un parallélogramme dont on connaît les deux côtés adjacens, il faut prendre la longueur du plus grand côté, et de chaque extrémité comme centre, et d'une ouverture de compas égale au petit côté, tracer deux arcs;

ensuite d'une des deux extrémités prise encore comme centre, et d'une ouverture de compas égale au grand côté, décrire un arc qui coupe l'un des deux premiers; du point d'intersection comme centre et d'une même ouverture de compas, décrire encore un arc qui coupe le second arc, joindre par une ligne droite les points d'intersection, et ceux-ci aux extrémités du grand côté déjà tracé. On aura ainsi le parallélogramme demandé.



Soient donnés (fig. 136) les côtés adjacens AC, AB d'un parallélogramme, et soit proposé d'en construire un qui lui soit identique, je prends DE égal à AC. Des points D et E comme centres, et d'une ouverture de compas égale à AB, je décris deux arcs. De l'extrémité E et d'une ouverture de compas égale à DE, je décris un arc qui coupe le premier en G. Du point G, comme centre, et d'un rayon égal à DE, je décris un nouvel arc qui coupe le second en F. Je tire DG, EF, GF. La figure DEFG est le parallélogramme demandé.

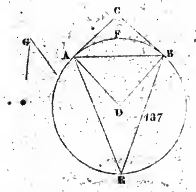
Car DE est, par construction, égal à AC, et DG égal à AB. Par la même raison, GF est égal à DE, et EF à DG. Donc le quadrilatère DEFG a ses côtés opposés respectivement égaux; donc ce quadrilatère est un parallélogramme (Tom. II, §. 544).

Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

95. *Sur une ligne donnée décrire un segment de cercle capable d'un angle donné* (Tom. II, §. 487).

Comment, sur une ligne donnée, décrit-on un segment de cercle capable d'un angle donné?

Pour décrire sur une ligne donnée un segment de cercle capable d'un angle donné, il faut à chaque extrémité de cette ligne faire un angle égal à l'angle donné, ce qui donne naissance à un triangle isoscèle. Aux deux côtés égaux et aux extrémités de la base, élever deux perpendiculaires, et de leur point de rencontre comme centre, avec une ouverture de compas suffisamment grande, décrire un cercle qui passe par une des deux extrémités de la droite proposée et par conséquent par l'autre : la partie du cercle qui est extérieure au triangle susdit sera le segment demandé.



En effet, soit (fig. 137) la ligne AB, et soit proposé de construire sur cette ligne un segment de cercle capable de l'angle G. Je fais au point A l'angle GAB, et au point B l'angle ABC égaux à

l'angle G. Au point A j'élève au côté AC la perpendiculaire AD. Au point B, j'élève au côté BC la perpendiculaire BD. Du point de rencontre D de ces deux perpendiculaires, et avec une ouverture de compas égale à AD ou BD, je décris la circonférence AFBE. Je dis que le segment de cercle ABE est capable de l'angle donné G, c'est-à-dire que tous les angles inscrits dans ce segment, et qui ont, par conséquent, pour mesure la moitié de l'arc AFB, sont égaux à l'angle donné G, et qu'ainsi l'angle inscrit AEB est égal à l'angle G.

Car, puisque AC est, par construction, perpendiculaire à l'extrémité du rayon AD, il s'ensuit (Tom. II, §. 592) que AC est une tangente à la circonférence AFBE. Donc l'angle CAB a pour mesure la moitié de l'arc AFB (Tom. II, §. 598). Mais l'angle inscrit AEB, qui s'appuie sur l'arc AFB, a pour mesure la moitié du même arc (Tom. II, §. 599). Donc l'angle AEB est égal à l'angle CAB. Mais l'angle CAB est, par construction, égal à l'angle G. Donc (Tom. II, §. 1), l'angle AEB est égal à l'angle G.

Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

96. *Construire un carré sur une ligne donnée.*

Pour construire un carré sur une ligne donnée, on élève une perpendiculaire à chaque extrémité de la ligne donnée, d'une grandeur égale à cette ligne, et l'on joint les extrémités des deux perpendiculaires par une droite. Comment construit-on un carré sur une ligne donnée?

97. *Construire un rectangle dont la base et la hauteur sont données.*

Comment construit-on un rectangle dont la base et la hauteur sont données?

On construit un rectangle dont la base et la hauteur sont données, en élevant à chaque extrémité de la base une perpendiculaire d'une grandeur égale à la hauteur donnée, et en joignant les extrémités de ces perpendiculaires par une droite.

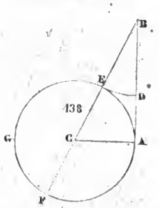
98. *Couper une ligne en moyenne et extrême raison* (1).

Comment coupe-t-on une ligne en moyenne et extrême raison?

Pour couper une ligne en moyenne et extrême raison, il faut élever à une extrémité de cette ligne une perpendiculaire égale à la moitié de la ligne, et de l'autre extrémité de la perpendiculaire, comme centre, et d'un rayon égal à cette perpendiculaire, décrire une circonférence : cela étant fait, on joint par une droite le centre avec celle des extrémités de la ligne proposée qui n'est pas adjacente à la perpendiculaire : enfin, d'un rayon égal à la partie extérieure de la ligne qui part du centre, on décrit un arc qui coupe la droite donnée en moyenne et extrême raison.

Soit proposé (fig. 138) de couper la droite AB en moyenne et extrême raison. Au point A j'élève sur AB une perpendiculaire CA, égale à la moitié de AB. Du point C, comme centre, et d'un rayon CA, je décris le cercle AFGE. Je tire

(1) *Une ligne est coupée en moyenne et extrême raison, lorsque la ligne entière et la plus petite partie sont les extrêmes d'une proportion dont la plus grande partie est la moyenne proportionnelle.*



BEC que je prolonge jusqu'en F. Enfin, du point B, comme centre, et d'un rayon égal à BE, je décris l'arc ED. Je dis que AB est coupé en moyenne et extrême raison au point D, c'est-à-dire que l'on a

$$AB : BD :: BD : AD.$$

En effet, puisque AB est, par construction, perpendiculaire à l'extrémité du rayon BC, il s'ensuit (Tom. II, §. 592) que AB est tangente à la circonférence AFGE; d'où résulte, en vertu du §. 53,

$$\overline{AB}^2 = BF \times BE \ (\alpha).$$

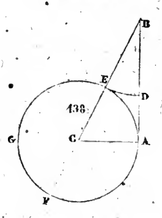
Cette équation étant composée des quatre facteurs AB, AB, BF, BE, j'obtiens (Tom. Ier., §. 349),

$$AB : BF :: BE : AB \ (\beta),$$

Ou bien, vu que BF est égal à BE + EF,

$$AB : BE + EF :: BE : AB \ (\gamma).$$

Mais BE est égal à BD par construction, et



EF est égal à AB aussi par construction ; d'où je tire, en substituant BD à BE, et AB à EF,

$$AB : BD + AB : : BD : AB\ (\delta),$$

Ou, *alternando* (Tom. Ier., §. 360),

$$AB : BD : : BD + AB : AB\ (\epsilon).$$

Donc, *subtrahendo* (Tom. Ier., §. 380),

$$AB - BD : BD : : BD + AB - AB : AB\ (\zeta).$$

Ou, en effectuant les soustractions,

$$AD : BD : : BD : AB\ (\eta).$$

Donc la ligne AB est coupée en moyenne et extrême raison au point D.

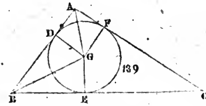
Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

99. *Inscrire un cercle dans un triangle donné.*

Comment inscrit-on un cercle dans un triangle donné ?

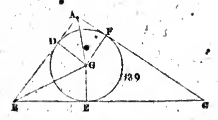
On inscrit un cercle dans un triangle donné en partageant deux quelconques de ses angles en deux parties égales par des droites dont le point de rencontre sera le centre du cercle cherché; et le rayon de ce cercle sera égal à chacune des trois

perpendiculaires abaissées de ce point de rencontre sur les trois côtés du triangle proposé; en sorte qu'en prenant une ouverture de compas de la grandeur d'une de ces perpendiculaires on décrira un cercle dont les trois côtés du triangle seront des tangentes.



Soit (fig. 139) le triangle ABC, et partageons les angles A et B en deux parties égales par les droites AG, BG qui se rencontreront en un point G. Je dis que le point G sera le centre du cercle inscrit cherché, que les perpendiculaires GD, GE, GF abaissées sur les trois côtés seront égales, et que par conséquent les trois côtés du triangle ABC seront des tangentes (Tom. II, §. 592).

En effet, puisque l'angle BAC est partagé en deux parties égales, et que les angles en D et en F sont droits, les deux triangles AGD, AGF sont équiangles, l'angle DAG étant égal à l'angle GAF, l'angle ADG égal à l'angle AFG, et par conséquent le troisième angle DGA égal au troisième angle FGA. Le côté AG est commun : donc ces deux triangles ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; donc ils sont identiques (Tom. II, §. 503), et les côtés égaux



étant opposés aux angles égaux (Tom. II, §. 502, Corollaire), l'on a

Côté GD = côté GF (α).

De même, puisque l'angle ABC est partagé en deux parties égales, et que les angles en D et en E sont droits, les deux triangles BGE, BGD sont équiangles, l'angle EBG étant égal à l'angle GBD, l'angle BEG égal à l'angle BDG, et par conséquent le troisième angle EGB égal au troisième angle BGD. Le côté BG est commun; donc ces deux triangles ont un côté égal adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun. Donc ils sont identiques; et les côtés égaux étant opposés aux angles égaux, il en résulte

Côté GE = côté GD (β).

Les équations (α) et (β) donnent

GD = GF = GE (γ).

Donc le point G est le centre du cercle inscrit cherché DEF, les perpendiculaires abaissées de ce centre sur les trois côtés du triangle proposé sont égales, et par conséquent rayons du cercle, et les trois côtés de ce triangle des tangentes à ce cercle : donc le cercle DEF est inscrit dans le triangle ABC.

Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

100. On voit que si l'on partageait en deux parties égales le troisième angle C du triangle ABC (fig. 139) par une ligne droite, elle passerait par le centre du cercle inscrit DEF, et que par conséquent *les trois droites qui partagent en deux parties égales les trois angles d'un triangle concourent en un même point qui est le centre du cercle inscrit.*

A quel point concourent les trois droites qui partagent en deux parties égales les trois angles d'un triangle?

Pour se convaincre que la droite qui partagerait en deux parties égales l'angle C du triangle ABC (fig. 139), passerait par le centre du cercle inscrit, il suffit de considérer que le quadrilatère CFGE a deux angles droits en E et en F et que par conséquent si on joignait CG on formerait deux triangles rectangles qui auraient le côté CG commun et le côté EG de l'un, égal au côté FG de l'autre. Ces deux triangles ayant deux côtés égaux chacun à chacun seraient identiques, (Tom. II, §. 572), et les angles égaux étant opposés aux côtés égaux (Tom. II, §. 502, Corol.), les deux angles en C, opposés aux côtés égaux EG, FG, seraient égaux.

101. *Circonscrire un cercle à un triangle donné.*

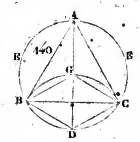
Pour circonscrire un cercle à un triangle donné, on emploie le même moyen que pour faire passer une circonférence par trois points donnés.

102. *Inscrire un triangle équilatéral dans un cercle donné.*

Pour inscrire un triangle équilatéral dans un cercle donné, il faut tirer un diamètre ; de l'une

Comment inscrit-on un triangle équilatéral dans un cercle donné?

des extrémités du diamètre comme centre, avec le rayon du cercle proposé, décrire un arc qui se termine de part et d'autre à la circonférence dudit cercle ; joindre par des droites les extrémités de l'arc avec celle des deux extrémités du diamètre qui n'a pas été prise pour le centre de l'arc, et tirer la corde de l'arc. Le triangle qui en résultera sera le triangle équilatéral demandé.



Soit (fig. 140) le cercle AFBDCE, dont le diamètre est AD, et le centre G. Du point D, comme centre, et d'un rayon égal à GD, je décris l'arc BGC, et je tire AB, AC, BC. Je dis que le triangle ABC est équilatéral.

En effet, tirons les quatre cordes BD, DC, CG, BG. Ces cordes sont égales, puisque leurs arcs ont été décrits avec le même rayon, et par conséquent les triangles BDG, DCG sont équilatéraux et identiques. Mais l'angle inscrit ABC est égal à l'angle inscrit GDC comme s'appuyant sur le même arc AEC (T. II, §. 601). De même, l'angle inscrit ACB est égal à l'angle inscrit BDG comme s'appuyant sur le même arc AFB. Donc le triangle BAC a deux de ses

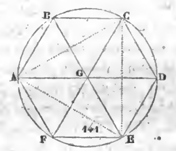
angles, savoir ABC, ACB, égaux aux angles d'un triangle équilatéral; donc le troisième en A est égal à chacun des deux autres: donc le triangle est équiangle, et par conséquent équilatéral.

Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

103. *Inscrire un hexagone régulier dans un cercle donné.*

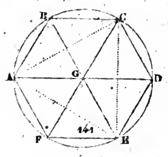
Comment inscrit-on un hexagone régulier dans un cercle donné.

Pour inscrire un hexagone régulier dans un cercle donné, il n'y a qu'à porter six fois le rayon comme corde sur la circonférence.



Soit (fig. 141) le cercle dont le centre est G; portons-en le rayon six fois sur la circonférence, et joignons les points de division par des cordes; je dis que la circonférence sera épuisée.

En effet, inscrivons le triangle équilatéral ACE, et sur chaque côté menons un rayon qui lui soit perpendiculaire: ce rayon passera par le milieu du côté, puisque ce côté est une corde, et par le milieu de l'arc sous-tendu par la corde (Tom. II, §. 585). Nous aurons donc six arcs



égaux, et par conséquent six cordes égales : tirons ces cordes et menons aux extrémités de ces arcs les rayons GA, GB, GC, GD, GE, GF ; il en résultera six triangles identiques, et deux côtés de chacun de ces triangles seront les rayons du cercle, tandis que le troisième côté sera la corde : il s'agit de savoir si ce troisième côté est égal au rayon ; or, il est clair qu'il lui est égal, car les six triangles AGB, BGC, CGD, DGE, EGF, FGA ont un angle au centre et deux angles inscrits (ceux de la base), et ces angles au centre s'appuient sur un arc qui n'est que la moitié de l'arc de l'angle inscrit. Donc chaque angle de la base est égal à l'angle au centre (Tom. II, §. 600). Donc chacun des six triangles ci-dessus est équiangle, et par conséquent équilatéral. Donc la corde de chacun des six arcs est égale au rayon.

A quoi est égal le côté de l'hexagone régulier inscrit ?

Donc le côté de l'hexagone régulier inscrit est égal au rayon.

Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

104. Corollaire. *Donc le côté du triangle équilatéral inscrit est au rayon comme la racine carrée de 3 est à l'unité.*

Quels sont les deux derniers termes d'une proportion dont les deux premiers sont le côté du triangle équilatéral inscrit et le rayon?

Car, soit la même figure 141. Le quadrilatère FEDG étant un losange (Tom. II, §. 439), il s'ensuit que l'on a cette équation :

$$\overline{DF}^2 + \overline{EG}^2 = 4\,\overline{FG}^2 = 4\,\overline{EG}^2\ (\alpha).$$

Retranchant $\overline{EG}^2$ de chaque membre de l'équation (α), ce qui (Tom. II, §. 7) ne détruit pas l'équation, il en résulte :

$$\overline{DF}^2 = 3\,\overline{EG}^2\ (\beta).$$

De là naît cette proportion :

$$\overline{DF}^2 : \overline{EG}^2 :: 3 : 1\ (\gamma).$$

Extrayant la racine carrée de chaque terme, ce qui (Tom. Ier., §. 386) ne détruit pas la proportion, on obtient :

$$DF : EG :: \sqrt{3} : 1\ (\delta).$$

Donc il est bien vrai que le côté du triangle équilatéral inscrit est au rayon comme la racine carrée de 3 est à l'unité.

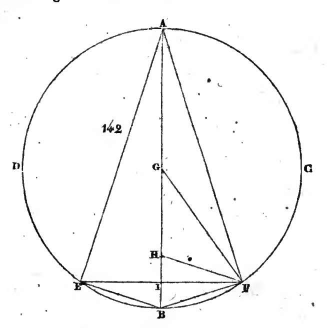
Ce qu'il fallait démontrer.

105. *Inscrire dans un cercle donné un triangle isoscèle dont chaque angle à la base soit double de l'angle du sommet.*

Pour inscrire dans un cercle donné un triangle isoscèle dont chaque angle à la base soit double de l'angle du sommet, on tire un diamètre et l'on coupe le rayon en moyenne et

Comment inscrit-on, dans un cercle donné, un triangle isoscèle dont chaque angle à la base soit double de l'angle du sommet?

extrême raison. De l'extrémité de ce rayon qui est à la circonférence, on tire deux cordes de part et d'autre du rayon, égales à la plus grande des deux parties du rayon : l'on tire une autre corde par les extrémités de l'arc qui est la somme des deux premiers : cette corde sera la base du triangle cherché, que l'on achèvera en joignant les extrémités de cette corde avec celle des deux extrémités du diamètre qui se trouve dans le même segment que les angles à la base.



Soit (fig. 142) le cercle ADBC. Tirons un diamètre AB; coupons le rayon GB en moyenne et extrême raison au point H (§. 98). Du point B prenons des cordes BF, BE égales chacune

à la plus grande partie GH du rayon GB : joignons AE, AF, EF : je dis que le triangle AEF est le triangle demandé, et que par conséquent l'angle AEF, ou l'angle AFE, est double de l'angle EAF.

Car les cordes BE, BF étant égales, leurs arcs sont égaux : donc, les supplémens ADE, ACF de ces arcs sont aussi égaux : donc, les cordes AE, AF de ces supplémens sont égales : donc le triangle AEF est isoscèle : donc, l'angle AEF est égal à l'angle AFE. De plus, les angles en I sont droits, puisque le rayon GB passe, par construction, par le milieu de l'arc EBF (Tom. II, §. 587).

Tirons GF et HF, nous aurons cette proportion (§. 98) :

$$GB : GH :: GH : BH \quad (\alpha).$$

Mais nous avons, par construction, BF = GH; donc

$$GB : BF :: BF : BH \quad (\beta).$$

Nous avons aussi (§. 50), puisque l'angle inscrit AFB s'appuie sur le diamètre AB, et est par conséquent droit,

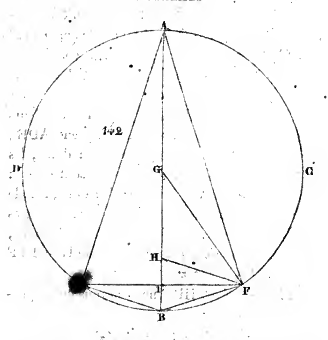
$$AB : BF :: BF : BI \quad (\gamma).$$

Mais $GB = 1/2\,AB.$

Donc, en vertu des proportions (β) et (γ), l'on a (1)

$$BI = 1/2\,BH = IH.$$

(1) Dans les proportions (β) et (γ) le premier conséquent étant identique, tandis que le premier antécé-



Donc le triangle BIF est identique avec le triangle IHF, comme ayant le côté BI égal au côté IH, le côté IF commun, et un angle droit compris entre ces côtés égaux, chacun à chacun (Tom. II, §. 502); et à plus forte raison ces deux triangles sont équiangles.

dent de la proportion (γ) est double de celui de la proportion (β), il s'ensuit que le quotient ou la raison des deux termes du premier rapport de la proportion (γ) est double de la raison des deux termes du premier rapport de la proportion (β), et que par conséquent la raison des deux termes du second rapport de la proportion (γ) doit être double de la raison des deux termes du second rapport de la proportion (β); donc il faut nécessairement que BI ne soit que la moitié de BH.

Le triangle BIF est équiangle avec les triangles ABF, AIF, en vertu de la proposition du §. 50.

Donc les quatre triangles BIF, ABF, AIF, IHF sont équiangles entr'eux. Voici le tableau de leurs angles et côtés homologues.

ANGLES HOMOLOGUES.

Tri. BIF	ang. BIF.	ang. AFB	ang. AIF.	ang. HIF.
	ang. IBF. Tri. ABF	ang. ABF. Tri. AIF	ang. AFI. Tri. IHF	ang. FHI.
	ang. BFI.	ang. BAF.	ang. FAG.	ang. HFI.

CÔTÉS HOMOLOGUES.

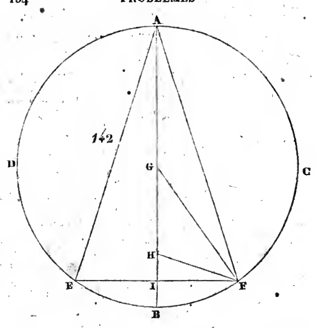
Tri. BIF	BF.	AB.	AF.	IIF.
	IF. Tri. ABF	AF. Tri. AIF	AI. Tri. IHF	IF.
	GB.	BF.	IF.	HI.

Les triangles BFH, EAF, BGF sont aussi équiangles entr'eux, et de plus isoscèles.

Car, d'après le tableau ci-dessus, l'angle BFI étant égal à l'angle HFI, l'angle BFH est double de l'angle BFI. Les angles inscrits BAF, BAE, s'appuyant sur des arcs égaux, sont égaux; donc l'angle EAF est double de l'angle BAF. Mais les angles BFI, BAF du tableau ci-dessus sont égaux. Donc l'angle EAF du triangle EAF est égal à l'angle BFH du triangle BFH.

L'angle AFI du triangle AIF du tableau ci-dessus est égal à l'angle ABF, ou (ce qui revient au même) HBF du triangle BFH.

Donc les triangles BFH, EAF ont deux angles égaux chacun à chacun; donc le troisième est égal au troisième, et par conséquent ils sont équiangles. Mais le triangle EAF est, par cons-



truction, isoscèle; donc le triangle BFH est aussi isoscèle ; donc le côté FB est égal au côté FH.

L'angle HBF du triangle BFH est commun au triangle BGF. Mais le triangle BGF étant isoscèle, puisque GB, GF sont les rayons du même cercle, il s'ensuit que l'angle BFG est égal à l'angle HBF, ou (ce qui revient au même) GBF. Mais le triangle BFH est aussi isoscèle ; donc l'angle BHF est égal à l'angle BFG. Donc les deux triangles BFH, BGF sont équiangles entr'eux.

Donc enfin les trois triangles BFH, EAF, BGF sont équiangles entr'eux.

Voici le tableau de leurs angles et côtés homologues.

ANGLES HOMOLOGUES.

Tri. BFH	Tri. EAF	Tri. BGF
ang. BFH	ang. EAF	ang. BGF.
ang. HBF	ang. AEF	ang. GBF.
ang. BHF	ang. AFE	ang. BFG.

CÔTÉS HOMOLOGUES.

Tri. BFH	Tri. EAF	Tri. BGF
BH	EF	BF.
HF	AF	GF.
BF	AE	GB.

GH étant, par construction, égal à BF, et ayant été démontré ci-dessus que BF est égal à HF, il s'ensuit que GH est égal à HF, et que par conséquent le triangle GHF est isoscèle. Donc l'angle HGF est égal à l'angle HFG ; donc l'angle BHF, qui est extérieur à l'égard du triangle GHF, est égal à la somme des deux angles égaux intérieurs non adjacens HGF, HFG (T. II, §. 531), ou au double de l'un d'eux BGF. Donc l'angle GBF, qui est égal à l'angle BHF, est égal au double de l'angle BGF. Donc le triangle isoscèle BGF a chacun de ses deux angles à la base double du troisième angle BGF: donc le triangle EAF, que nous avons démontré être équiangle au triangle BGF, a aussi chacun de ses deux angles à la base double de l'angle EAF du sommet.

Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

106. *Inscrire un pentagone régulier dans un cercle donné.*

Pour trouver le côté d'un pentagone régu-

lier inscrit dans un cercle donné, il n'y a qu'à inscrire dans ce cercle un triangle isoscèle, dont chaque angle à la base soit double de l'angle vertical : la base sera le côté cherché.

En effet, partageons en deux parties égales les deux arcs sous-tendus par les deux côtés égaux du triangle isoscèle, et joignons les points de division aux trois sommets du triangle : nous aurons ainsi cinq arcs égaux qui épuiseront toute la circonférence.

Cette démonstration est si simple, qu'il n'est pas nécessaire d'avoir recours à une figure.

107. *Inscrire un décagone régulier dans un cercle donné.*

Comment inscrit-on un décagone régulier dans un cercle donné?

On inscrit un décagone régulier dans un cercle donné en commençant par chercher le côté du pentagone régulier; cela obtenu, on partage l'arc sous-tendu par ce côté en deux parties égales : l'une de ces deux moitiés est l'arc qu'il faut porter dix fois sur la circonférence pour avoir le décagone régulier demandé.

108. *En général, on peut inscrire dans un cercle un polygone régulier quelconque d'un nombre de côtés double de celui des côtés d'un autre polygone régulier en opérant la bissection des arcs de celui-ci.*

Comment inscrit-on un pentédécagone régulier dans un cercle donné?

109. *Inscrire un pentédécagone régulier dans un cercle donné* (1).

(1) *Pentédécagone* signifie *polygone de quinze côtés.*

Pour trouver le côté d'un pentédécagone régulier inscrit il n'y a qu'à chercher le côté de l'hexagone régulier inscrit (§. 103), et le côté du décagone régulier inscrit (§. 107). Les deux arcs sous-tendus par ces côtés étant retranchés l'un de l'autre donneront pour différence un arc dont la corde sera le côté du pentédécagone régulier inscrit cherché.

Il ne s'agira que de résoudre cette équation :

$$1/15 = 1/6 - 1/10.$$

Transformant ces fractions en 30es, on obtient :

$$2/30 = 5/30 - 3/30.$$

D'où résulte cette équation identique :

$$2/30 = 2/30$$

ou

$$1/15 = 1/15.$$

110. *Inscrire un carré dans un cercle donné.*

On inscrit un carré dans un cercle donné en tirant deux diamètres perpendiculaires entr'eux. Les cordes qui joignent leurs extrémités forment le carré demandé. **Comment inscrit-on un carré dans un cercle donné ?**

Car, en menant deux diamètres perpendiculaires entr'eux, on forme quatre angles droits qui ont chacun pour mesure un arc égal au quart de la circonférence. Or, dans un même cercle, les arcs égaux sont sous-tendus par des cordes égales.

Quels sont les deux derniers termes d'une proportion dont les deux premiers sont le côté du carré inscrit et le rayon ?

111. COROLLAIRE. *Le côté du carré inscrit est au rayon comme la racine carrée de 2 est à l'unité.*

Car, puisque le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit (T. II, §. 562), il s'ensuit que dans le cas où les deux côtés de l'angle droit sont égaux, le carré de l'hypoténuse est égal au double carré d'un des côtés de l'angle droit, et qu'ainsi l'on a cette proportion:

Carré de l'hypot. : Carré du côté de l'angle droit : : 2 : 1.

Extrayant la racine carrée des 4 termes de cette proportion, ce qui (T. Ier., §. 386) ne détruit pas la proportion, il en résulte:

Hyp. : côté de l'angle droit : : $\sqrt{2}$: 1.

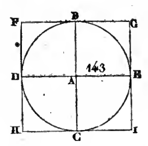
Or, dans le cas du carré inscrit, le côté du carré est l'hypoténuse, tandis que le rayon est le côté de l'angle droit.

Ce qu'il fallait démontrer.

112. *Circonscrire un carré à un cercle donné.*

Comment circonscrit-on un carré à un cercle donné ?

Pour circonscrire un carré à un cercle donné on tire deux diamètres perpendiculaires entre eux, et l'on mène deux parallèles de part et d'autre de chacun de ces deux diamètres à leurs quatre extrémités. Le quadrilatère ainsi formé sera le carré circonscrit demandé.



Soit (fig. 143) le cercle BCDE, et tirons à angle droit les deux diamètres BC, DE. Aux extrémités D, E, menons les droites FH, GI parallèles à BC. Aux extrémités B, C, menons les droites HI, FG parallèles à DE. Les parallèles comprises entre parallèles étant égales, nous aurons FG et HI égales chacune à DE, et FH, GI égales chacune à BC. Mais, DE et BC sont des diamètres du même cercle : donc ils sont égaux. Donc les quatre côtés FG, GI, IH, HF, sont égaux.

De plus, puisque dans tout parallélogramme, les angles opposés sont égaux, et que les angles en A sont droits, il s'ensuit que les angles F, H, I, G, qui sont opposés aux angles en A, sont droits.

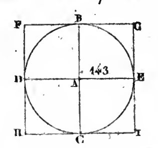
Donc le quadrilatère FHIG est un carré, et de plus tous ses côtés sont des tangentes à la circonférence BDCE.

Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

113. *Inscrire un cercle dans un carré donné.*

Comment inscrit-on un cercle dans un carré donné ?

On inscrit un cercle dans un carré donné en élevant deux perpendiculaires au milieu de deux côtés adjacens du carré donné : ces perpendiculaires se rencontreront en un point du carré donné et formeront quatre carrés égaux. Le point de rencontre de ces perpendiculaires sera le centre du cercle inscrit qui aura pour rayon un des côtés de ces quatre carrés.



Soit (fig. 143) le carré FHIG : au milieu de FG j'abaisse la perpendiculaire CB ; au milieu de FH j'abaisse la perpendiculaire ED. Du point d'intersection A, comme centre, et d'un rayon égal à AD, je décris le cercle BDCE qui sera le cercle inscrit demandé. Car, tous les côtés du carré FHIG sont, par construction, perpendiculaires à l'extrémité des quatre rayons ; donc ces côtés sont des tangentes.

Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

114. *Circonscrire un cercle à un carré donné.*

Comment circonscrit-on un cercle à un carré donné ?

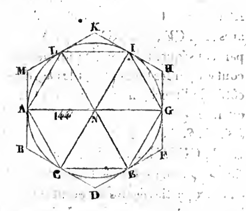
Pour circonscrire un cercle à un carré donné on tire les deux diagonales du carré. Le point d'intersection sera le centre du cercle circonscrit demandé.

Car les deux diagonales d'un carré se coupant en deux parties égales, l'on obtiendra ainsi quatre lignes égales. Donc le rayon du cercle circonscrit sera égal à l'une de ces parties.

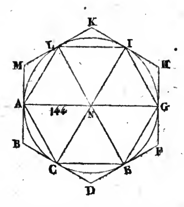
Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

115. *Circonscrire un polygone régulier à un cercle donné.*

On circonscrit un polygone régulier à un cercle donné, en commençant par inscrire à ce cercle un polygone régulier d'un même nombre de côtés, et en menant ensuite par les sommets des angles du polygone inscrit des tangentes au cercle donné. **Comment circonscrit-on un polygone régulier à un cercle donné?**



Soit (fig. 144) le cercle ACEGIL, et soit proposé de lui circonscrire un hexagone régulier. J'inscris dans ce cercle l'hexagone régulier désigné par les mêmes lettres, et aux sommets de cet hexagone je conduis les rayons NA, NC, NE, NG, NI, NL. A l'extrémité de ces rayons je mène les tangentes MB, BD, DF,



FH, HK, KN. Je dis que le polygone MBDFHK est l'hexagone régulier circonscrit demandé.

Car, puisque, par construction, le polygone ACEGIL est un hexagone régulier inscrit, les arcs AC, CE, EG, GI, IL, LA, sont égaux, et par conséquent les angles formés aux points de contact par les tangentes et les cordes qui sont les côtés de l'hexagone régulier inscrit, sont égaux, comme ayant pour mesure la moitié de ces arcs (T. II, §. 598). Donc les triangles ABC, CDE, EFG, GHI, IKL, LMA, sont isoscèles et identiques. Donc toutes les tangentes sont partagées en deux parties égales au point de contact. Donc les côtés MB, BD, DF, FH, HK, KM sont égaux. Donc le polygone MBDFHK est l'hexagone régulier circonscrit demandé.

Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

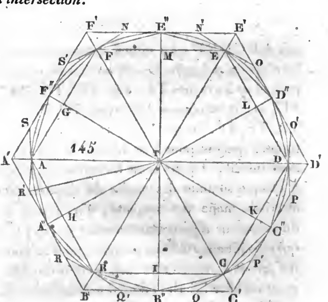
116. *On peut toujours inscrire dans la plus grande de deux circonférences concentriques un polygone régulier dont les côtés ne touchent*

pas la plus petite, et circonscrire à la plus petite un polygone régulier dont les côtés ne touchent pas la plus grande.

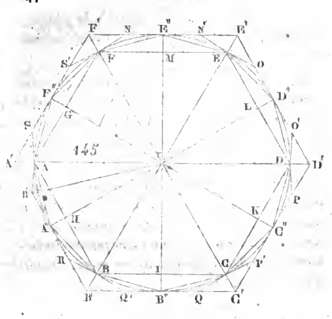
117. *Étant données les surfaces d'un polygone régulier inscrit et d'un polygone semblable circonscrit, trouver les surfaces des polygones réguliers inscrit et circonscrit d'un nombre de côtés double.*

Pour trouver les surfaces demandées, il n'y a qu'à partager en deux parties égales les arcs auxquels les côtés du polygone inscrit servent de cordes, mener des cordes aux points d'intersection, et des tangentes à ces mêmes points d'intersection.

Étant données les surfaces d'un polygone régulier inscrit et d'un polygone semblable circonscrit, comment trouve-t-on les surfaces des polygones réguliers inscrit et circonscrit, d'un nombre de côtés double?



Soient (fig. 145) l'hexagone régulier inscrit ABCDEF, et le polygone semblable circons-



crit A'B'C'D'E'F'. Au milieu des arcs auxquels les côtés du polygone inscrit servent de cordes, je conduis les rayons TA", TB", TC", TD", TE", TF", et aux extrémités les rayons TA, TB, TC, TD, TE, TF, ce qui forme 12 triangles identiques, qui ont pour base le côté du duodécagone inscrit, et pour côtés les rayons du cercle. A chaque sommet des angles du duodécagone inscrit je mène une tangente, d'où résulte un duodécagone régulier circonscrit (§. 115), ce qui satisfait au problème proposé, pour le cas où il s'agirait de trouver les surfaces d'un duodécagone régulier inscrit et d'un duodécagone régulier circonscrit, lorsque l'on aurait celles d'un hexagone régulier inscrit et d'un hexagone régulier circonscrit.

Mais pour en étendre l'application à tous les cas, il faut employer l'analyse.

Prenons au hasard un des 12 triangles identiques, TAA″, par exemple, et partageons en deux parties égales l'angle ATA″ par TR′. La surface du triangle TAA″ sera la douzième partie du duodécagone régulier inscrit AA″BB″CC″DD″EE″FF″.

Appelons α la surface de l'hexagone régulier inscrit dont AB est le côté, et ω la surface de l'hexagone régulier circonscrit dont A′B′ est le côté, α' la surface inconnue du duodécagone régulier inscrit, dont AA″ est le côté, ω' la surface inconnue du décagône régulier circonscrit dont R′S est le côté.

Les triangles TAH, TAA″, dont le sommet commun est A, et dont les bases sont TH, TA″, donnent cette proportion :

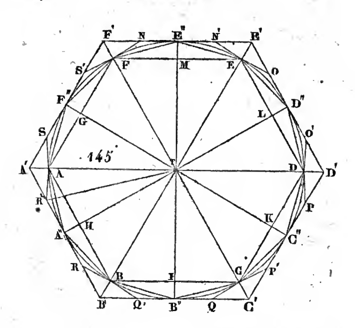
$$\text{tri. TAH} : \text{tri. TAA}'' :: \text{TH} : \text{TA}'' \ (1).$$

Mais le triangle TAA″ est, par hypothèse, la douzième partie du duodécagone régulier inscrit cherché, représenté par α', et le triangle TAH est aussi la douzième partie de l'hexagone régulier inscrit proposé représenté par α.

Multipliant par 12 les deux premiers termes de la proportion (1), ce qui (Tom. Ier., §. 369) ne détruit pas la proportion, l'on obtient

$$\alpha : \alpha' :: \text{TH} : \text{TA}'' \ (2).$$

Les triangles TA″A, TA″A′, dont le sommet



commun est A'', et dont les bases sont TA, TA', fournissent cette proportion :

tri. TA''A : tri. TA''A' : : TA : TA' (3).

Mais le triangle TA''A est la douzième partie du duodécagone inscrit cherché représenté par α', et le triangle TA''A' est aussi la douzième partie de l'hexagone régulier circonscrit proposé représenté par ω.

Multipliant par 12 les deux premiers termes de la proportion (3), ce qui (T. Ier., §. 369) ne détruit pas la proportion, j'obtiens

$\alpha' : \omega : :$ TA : TA' (4).

Mais BH, B'A'' étant parallèles, il en résulte

TH : TA'' : : TA : TA' (5).

Des proportions (2) (4) et (5) on déduit cette nouvelle proportion :

$$\alpha : \alpha' :: \alpha' : \omega \ (6).$$

Donc

10. Le polygone α', qui est le duodécagone régulier inscrit cherché, est moyen proportionnel entre les deux hexagones réguliers proposés α et ω inscrit et circonscrit, et l'on tire cette équation :

$$\alpha' = \sqrt{\alpha \times \omega} \ (7).$$

Maintenant, les triangles TA″R′, TR′A′, dont la hauteur commune est TA″, donnent lieu à cette proportion :

Tri. TA″R′ : tri. TR′A′ : : A″R′ : R′A′ (8).

La ligne TR′ divisant en deux parties égales l'angle A″TA′, on obtient (§. 19) :

A″R′ : R′A′ : : TA″ : TA′ : : TH : TA (9).

Mais TA″ et TA sont égaux, comme rayons du même cercle ; donc

A″R′ : R′A′ : : TA″ : TA′ : : TH : TA″ (10).

D'où on conclut, en vertu de la proportion (2) :

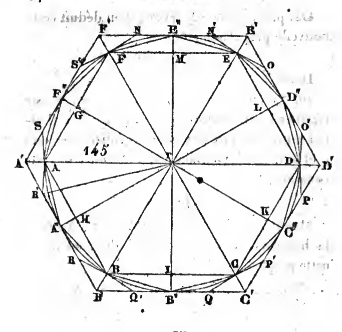
A″R′ : R′A′ : : TA″ : TA′ : : TH : TA″ : : $\alpha : \alpha'$ (11).

D'où résulte, d'après la proportion (8),

Tri. TA″R′ : tri. TR′A′ : : $\alpha : \alpha'$ (12).

Donc, *invertendo* (T. Ier., §. 377), en prenant pour type *addendo-invertendo* de la proportion (12) :

Tri. TA″R′ : tri. TA″R′ + tri. TR′A′ : : $\alpha : \alpha + \alpha'$ (13),



ou,

Tri. $TA''R' :$ tri. $TA''A' : : \alpha : \alpha + \alpha'$ (14).

Multipliant par 2 les deux antécédens de la proportion (14), ce qui (T. Ier., §. 54) ne détruit pas la proportion, je trouve

2 tri. $TA''R' :$ tri. $TA''A' : : 2\alpha : \alpha + \alpha'$ (15).

Mais la quantité 2 triang. $TA''R'$ est égale à $TA''R'A$; donc

$TA''R'A :$ tri. $TA''A' : : 2\alpha : \alpha + \alpha'$ (16).

Mais $TA''R'A$ est la 12e partie du polygone circonscrit cherché ω', et tri. $TA''A'$ est aussi la 12e partie du polygone circonscrit proposé ω.

Multipliant donc par 12 les deux premiers termes de la proportion (16), ce qui (T. Ier.,

§. 369) ne détruit pas la proportion, j'obtiens

$$\omega' : \omega :: 2\alpha : \alpha + \alpha' \ (17).$$

De cette proportion je déduis l'équation

$$\omega' = (\omega \times 2\alpha)/(\alpha + \alpha').$$

Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

118. *Trouver le rapport approché de la circonférence au diamètre.*

En supposant le rayon du cercle égal à 1, le côté du carré inscrit sera égal à $\sqrt{2}$ (§. 111). Le côté du carré circonscrit sera égal à 2, car le côté du carré circonscrit n'est autre chose que le double rayon du cercle inscrit ; et comme pour obtenir la surface d'un carré on multiplie le côté du carré par lui-même, la surface du carré inscrit sera égale à 2, puisque le côté est $\sqrt{2}$, tandis que la surface du carré circonscrit sera égale à 4.

Maintenant supposons que la surface du polygone régulier inscrit α du §. précédent soit égale à 2, et que la surface du polygone semblable circonscrit ω soit égale à 4, l'octogone inscrit sera représenté par α', et l'octogone circonscrit par ω', d'où résulteront ces deux équations :

$$\alpha' = \sqrt{\alpha \times \omega} = \sqrt{2 \times 4} = \sqrt{8} = 2{,}8284271 \ (18),$$

en prenant sept chiffres décimaux ;

$$\omega' = (4 \times 2 \times 2)/(2 + \sqrt{8}) = 3{,}3137085 \ (19).$$

L'octogone inscrit et l'octogone circonscrit étant ainsi obtenus, on connaîtra par leur moyen les polygones d'un nombre double de

côtés. Pour cela on fera α égal à α' de l'équation (18), et ω égal à ω' de l'équation (19); d'où naîtront ces deux équations :

$$\alpha' = \sqrt{\alpha \times \omega} = 3{,}0614674 \ (20);$$

$$\omega' = (2\alpha \times \omega) / (\alpha + \alpha') = 3{,}1825979 \ (21).$$

Ces polygones de 16 côtés serviront à trouver ceux de 32, et ainsi de suite en doublant toujours, jusqu'à ce que le calcul ne donne plus de différence entre les polygones inscrit et circonscrit, dans l'ordre de chiffres décimaux auquel on s'est arrêté.

Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

119. *Faire un carré égal à un parallélogramme donné.*

Comment fait-on un carré égal à un parallélogramme donné?

Pour faire un carré égal à un parallélogramme donné, on cherche une moyenne proportionnelle entre la base et la hauteur du parallélogramme : cette moyenne proportionnelle sera le côté du carré cherché.

120. *Faire un carré égal à un triangle donné.*

Comment fait-on un carré égal à un triangle donné?

On fait un carré égal à un triangle donné en prenant une moyenne proportionnelle entre la base et la moitié de la hauteur du triangle : cette moyenne proportionnelle sera le côté du carré cherché.

121. *Faire sur une ligne donnée un rectangle égal à un rectangle donné.*

Comment fait-on sur une ligne donnée un rectangle égal à un rectangle donné?

Pour faire sur une ligne donnée un rectangle égal à un rectangle donné, on cherche le quatrième terme d'une proportion dont le pre-

mier terme est la ligne donnée, le second la base du rectangle donné, et le troisième la hauteur du rectangle donné : ce quatrième terme sera la hauteur du rectangle cherché.

122. *Faire sur une ligne donnée un rectangle égal à un parallélogramme donné.*

On fait sur une ligne donnée un rectangle égal à un parallélogramme donné en prenant le quatrième terme d'une proportion dont le premier terme est la ligne donnée, le second la base du parallélogramme donné, et le troisième la hauteur du parallélogramme donné : ce quatrième terme sera la hauteur du rectangle cherché.

Comment fait-on sur une ligne donnée un parallélogramme égal à un parallélogramme donné?

123. *Trouver en lignes le rapport du produit de deux lignes données au produit de deux autres lignes données.*

Pour trouver en lignes le rapport du produit de deux lignes données au produit de deux autres lignes données, il faut chercher le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers termes soient la seconde, la troisième et la quatrième ligne données : le quatrième terme cherché sera le conséquent du rapport cherché dont l'antécédent est la première des quatre lignes données.

Comment trouve-t-on en lignes le rapport du produit de deux lignes données au produit de deux autres lignes données?

Soient proposées les lignes a, b, c, d, de manière à donner les produits ab, cd. Soit x le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers sont b, c, d : je dis que le rapport des deux lignes a et x est égal au rapport

des deux produits ab, cd, c'est-à-dire que l'on a

$$ab : cd :: a : x.$$

En effet, puisque l'on a, par hypothèse,

$$b : c :: d : x \ (\alpha),$$

On en déduit cette équation:

$$cd = bx \ (\beta).$$

D'où l'on tire

$$ab : cd :: ab : bx \ (\gamma).$$

Car la proportion (γ) revient à cette proportion identique:

$$ab : cd :: ab : cd \ (\delta),$$

puisque bx est égal à cd d'après l'équation (β).

Divisant par b les deux derniers termes de la proportion (γ), ce qui (T. Ier., §. 53) ne détruit pas la proportion, on obtient

$$ab : cd :: a : x \ (\varepsilon).$$

Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

124. *Chercher en lignes le rapport du carré d'une ligne donnée au carré d'une autre ligne donnée.*

Comment cherche-t-on en lignes le rapport du carré d'une ligne donnée au carré d'une autre ligne donnée?

On cherche en lignes le rapport du carré d'une ligne donnée au carré d'une autre ligne donnée en prenant une troisième proportionnelle aux deux lignes données : cette troisième proportionnelle sera le conséquent du rapport cherché dont l'antécédent est la première des deux lignes données.

Soient proposées la ligne a et la ligne b. Je cherche une troisième proportionnelle (§. 86) aux lignes a et b, ce qui me donne

$$a : b :: b : x \ (\alpha).$$

De là résulte cette équation :

$$b^2 = ax \ (\beta).$$

D'où l'on déduit cette proportion :

$$a^2 : b^2 :: a^2 : ax \ (\gamma).$$

Divisant par a les deux derniers termes de la proportion (γ), ce qui (T. Ier., §. 53) ne détruit pas la proportion, on obtient

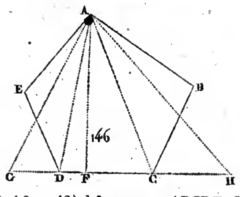
$$a^2 : b^2 :: a : x \ (\delta).$$

Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

125. *Faire un triangle égal en surface à un pentagone donné.*

Comment fait-on un triangle égal en surface à un pentagone donné?

Pour faire un triangle égal en surface à un pentagone donné, on tire du sommet d'un même angle deux diagonales au moyen desquelles on forme trois triangles, et l'on prolonge de chaque côté la base du triangle du milieu jusqu'à ce que ce prolongement soit égal au quotient que l'on obtient en divisant le produit de la base et de la hauteur des deux triangles extérieurs respectifs par la hauteur du triangle du milieu.



Soit (fig. 146) le pentagone ABCDE. Soient menées les diagonales AC, AD au moyen desquelles se trouvent formés trois triangles, savoir : AED, ADC et ACB, et soit abaissée la perpendiculaire AF sur la base CD du triangle ADC.

Je prolonge le côté CD du pentagone d'une quantité suffisante GD, pour qu'en multipliant GD par AF, hauteur du triangle AGD, j'aie pour produit une quantité égale au produit de la hauteur du triangle AED par sa base ED, c'est-à-dire une surface double du triangle AGD ainsi que du triangle AED, ce qui signifie que ces deux triangles sont égaux en surface.

Je prolonge de même le côté CD d'une quantité suffisante CH, pour qu'en multipliant CH par AF, hauteur du triangle ACH, j'aie pour produit une quantité égale au produit de la hauteur du triangle ACB par sa base BC, c'est-à-dire une surface double du triangle ACH ainsi que du triangle ACB, ce qui signifie que ces deux triangles sont égaux en surface.

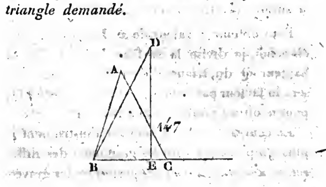
Or, puisque le triangle AGD est égal en surface au triangle AED, et que le triangle ACH est égal en surface au triangle ACB, il s'ensuit que la surface du triangle ADC est égale à la surface du pentagone ABCDE.

Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

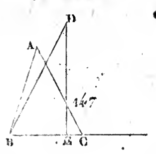
126. *Transformer un triangle donné en un autre triangle qui lui soit égal en surface et qui ait son sommet à un point donné.*

Comment transforme-t-on un triangle donné en un autre triangle qui lui soit égal en surface, et qui ait son sommet à un point donné ?

On transforme un triangle donné en un autre triangle qui lui soit égal en surface et qui ait son sommet à un point donné, en abaissant du point donné une perpendiculaire sur la base du triangle donné, prolongée s'il est nécessaire, et en divisant par cette perpendiculaire le produit de la hauteur par la base du triangle donné : la ligne quotient sera la ligne qu'il faudra placer sur la base du triangle donné, et aux extrémités de cette ligne, qui sera la base du triangle cherché, on conduira deux lignes du point donné pour former le triangle demandé.



Soit proposé (fig. 147) de transformer le



triangle ABC en un autre qui lui soit égal en surface, et dont le sommet soit au point D.

Sur la base BC du triangle proposé, j'abaisse du sommet A une perpendiculaire que j'appellerai P.

Sur cette même base j'abaisse du point donné D une perpendiculaire que j'appellerai Q.

En multipliant BC × P j'aurai une surface égale au double de la surface du triangle proposé ABC (§. 6).

En appelant x la base du triangle cherché et multipliant x par la hauteur P de ce même triangle, j'aurai une surface égale au double de la surface du triangle cherché (§. 6).

Pour obtenir la valeur de x, base du triangle cherché, je divise la surface BC × P par la hauteur Q du triangle cherché. Le quotient sera le facteur par lequel il faudra multiplier Q, pour avoir un produit égal à BC × P.

Le compas de proportion est l'instrument le plus propre à prendre les grandeurs des différentes lignes au moyen des parties égales gravées sur une de ses faces.

On prend d'abord la grandeur de la base et de la hauteur du triangle proposé, et on les multiplie l'une par l'autre.

On prend ensuite la grandeur de la hauteur du triangle cherché, et on divise le produit précédent par cette hauteur; le quotient sera la base du triangle cherché. Dans le cas actuel le quotient est BE, c'est-à-dire que le triangle cherché est DBE.

Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

127. *Trouver un triangle d'une hauteur donnée égal en surface à un polygone quelconque donné.*

Pour trouver un triangle d'une hauteur donnée égal en surface à un polygone quelconque donné, il faut réduire le polygone en triangle, en menant d'un même angle des diagonales à tous les angles non adjacens, chercher la hauteur de chaque triangle, multiplier la base de chaque triangle par sa hauteur, réunir tous ces produits, et diviser leur somme par la hauteur du triangle cherché; le quotient sera la base du triangle cherché.

Comment trouve-t-on un triangle d'une hauteur donnée, égal en surface à un polygone quelconque donné?

128. *Faire un carré qui soit égal à la somme de deux carrés donnés.*

Pour construire un carré qui soit égal à la somme de deux carrés donnés, on forme un angle droit avec deux lignes indéfinies, et l'on prend sur l'une une portion égale au côté d'un des deux carrés donnés, et sur l'autre une portion égale au côté de l'autre carré donné; on

Comment construit-on un carré qui soit égal à la somme de deux carrés donnés?

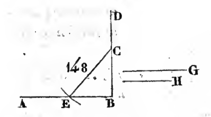
joint les deux points d'intersection par une droite qui sera le côté du carré cherché.

Car cette droite est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, et par conséquent le carré de cette droite est égal à la somme des deux carrés proposés.

129. *Faire un carré qui soit égal à la différence de deux carrés donnés.*

Comment fait-on un carré qui soit égal à la différence de deux carrés donnés?

On fait un carré égal à la différence de deux carrés donnés en formant un angle droit avec deux lignes indéfinies, en prenant sur une des deux lignes, à partir du point de rencontre, une portion égale au côté du plus petit carré donné, et en décrivant, du point de section, et d'un rayon égal au côté du plus grand carré donné, un arc qui coupe l'autre côté indéfini. La droite comprise entre le point de section et le côté qui lui est perpendiculaire sera le côté du carré cherché.



Soit (fig. 148) G le côté du plus grand des deux carrés donnés, H le côté du plus petit; je tire à angle droit deux lignes indéfinies AB, BD. Je prends sur BD une portion BC égale à H; du point C, comme centre, et d'un rayon

égal à G, je décris un arc qui coupe AB au point E. Je dis que BE est le côté du carré demandé.

Car, puisque l'angle B est droit par construction, le côté CE est l'hypoténuse du triangle BCE. De là résulte cette équation (T. II, §. 563):

$$\overline{BE}^2 = \overline{CE}^2 - \overline{BC}^2.$$

Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

130. *Un triangle étant donné, construire un triangle semblable sur un côté donné homologue à un des côtés du triangle donné.*

Un triangle étant donné, on construit un triangle semblable sur un côté donné homologue à un des côtés du triangle donné, en plaçant le côté donné sur son homologue de manière qu'une de ses extrémités tombe sur une des extrémités du côté donné, et en faisant à ses extrémités des angles égaux respectivement à ceux des angles adjacens au côté homologue du triangle donné.

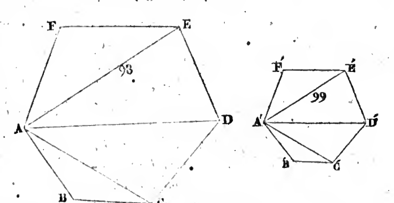
Un triangle étant donné, comment construit-on un triangle semblable sur un côté donné homologue à un des côtés du triangle donné?

131. *Un polygone étant donné, construire un polygone semblable sur un côté donné homologue à un des côtés du polygone donné.*

Un polygone étant donné, pour construire un polygone semblable sur un côté donné homologue à un des côtés du polygone donné, on commence par mener des diagonales du sommet d'un même angle du polygone donné à tous les autres angles non adjacens pour former

Un polygone étant donné, comment construit-on un polygone semblable sur un côté donné homologue à un des côtés du polygone donné?

autant de triangles ; ensuite prenant pour base le côté donné, faire deux angles adjacens à cette base, égaux chacun à chacun, à ceux adjacens au côté homologue du polygone donné ; les lignes qui formeront ces angles se rencontreront en un point, et par là se trouvera formé un triangle semblable au premier triangle du polygone proposé. Pour former les autres triangles semblables qui doivent composer le polygone cherché, on prend pour bases les diagonales à mesure qu'on les trouve pour faire à leurs bases des angles égaux chacun à chacun à ceux des triangles du polygone proposé, jusqu'à ce que le polygone cherché se trouve composé d'un nombre de triangles égal à celui du polygone proposé.



Soit proposé (fig. 99) de former sur A'B' un hexagone A'B'C'D'E'F' semblable à l'hexagone ABCDEF de la figure 98, et soit A'B' homologue au côté AB.

Sur le côté A'B' je fais l'angle A'B'C' égal à

l'angle ABC, et l'angle B'A'C' égal à l'angle BAC. Les lignes B'C', A'C' se couperont en un point C', et formeront un triangle A'B'C' semblable au triangle ABC.

Maintenant, sur le côté A'C' je fais l'angle A'C'D' égal à l'angle ACD, et l'angle C'A'D' égal à l'angle CAD, ce qui me donne le triangle A'C'D' semblable au triangle ACD.

Sur le côté A'D' je fais l'angle A'D'E' égal à l'angle ADE, et l'angle D'A'E' égal à l'angle DAE, d'où résulte le triangle D'A'E' semblable au triangle DAE.

Enfin, sur le côté A'E' je fais l'angle A'E'F' égal à l'angle AEF, et l'angle E'A'F' égal à l'angle EAF, ce qui forme le triangle E'A'F' semblable au triangle EAF.

L'hexagone cherché se compose donc de quatre triangles semblables chacun à chacun aux quatre triangles de l'hexagone proposé : donc ces deux hexagones sont semblables (§. 41).

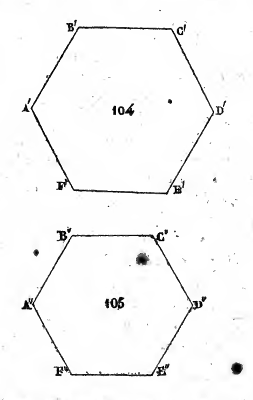
Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

132. *Deux polygones semblables étant donnés, construire un polygone semblable qui soit égal à leur somme.*

Deux polygones semblables étant donnés, comment construit-on un polygone semblable qui soit égal à leur somme?

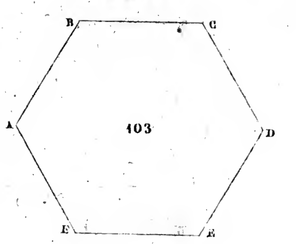
Deux polygones semblables étant donnés, pour construire un polygone semblable qui soit égal à leur somme, on prend une ligne (§. 128) *qui soit le côté d'un carré égal à la somme des carrés de deux côtés homologues des polygones donnés. Cette ligne sera, dans la figure*

cherchée, le côté homologue aux deux côtés homologues précités des deux polygones donnés.



Soit le polygone de la figure 105 semblable au polygone de la figure 104, et soit A"B" homologue à A'B'. Soit AB (fig. 103) le côté du carré égal à la somme des carrés construits sur les côtés homologues A"B", A'B'; je dis que AB sera dans le polygone cherché le côté homologue aux côtés A"B", A'B'.

Car les polygones semblables sont entr'eux comme les carrés des côtés homologues (§. 44);



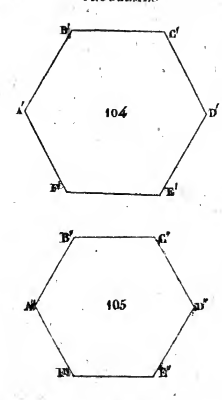
or, le carré de AB est égal à la somme des carrés construits sur A″B″ et A′B′.

Il ne s'agit plus que de construire la fig. 103 d'après le problème du §. 131, et cette figure faite sur le côté AB sera égale à la somme des figures semblables 104 et 105.

Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

133. *Deux polygones semblables étant donnés, construire un polygone semblable qui soit égal à leur différence.*

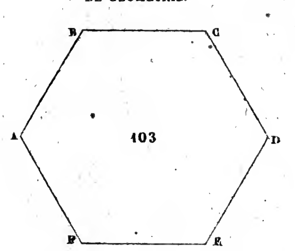
Deux polygones semblables étant donnés, pour construire un polygone semblable qui soit égal à leur différence, on prend une ligne (§. 129) *qui soit le côté d'un carré égal à la différence des carrés de deux côtés homologues des polygones donnés; cette ligne sera, dans la figure cherchée, le côté homologue aux deux côtés homologues précités des deux polygones donnés.* **Deux polygones semblables étant donnés, comment construit-on un polygone semblable qui soit égal à leur différence?**



Soit le polygone de la figure 104 semblable au polygone de la figure 103, et A'B' homologue à AB. Soit A''B'' (fig. 105) le côté du carré égal à la différence des carrés construits sur les côtés homologues A'B'' AB. Je dis que A''B'' sera dans le polygone cherché le côté homologue aux côtés A'B', AB.

Car les polygones semblables sont entr'eux comme les carrés des côtés homologues (§. 44); or, le carré de A''B'' est égal à la différence des carrés construits sur A'B' et AB.

Il ne reste plus qu'à construire la figure 105



d'après le problème du §. 131, et cette figure faite sur le côté A″B″ sera égale à la différence des figures semblables 103 et 104.

Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE RÉSOLUS PAR LE COMPAS DE PROPORTION.

134. *A un point donné sur une ligne, faire, au moyen du compas de proportion, un angle d'un nombre donné de degrés.*

Pour faire, à un point donné sur une ligne, au moyen du compas de proportion, un angle d'un nombre donné de degrés, on prend le point donné comme centre, et d'une ouverture de compas ordinaire égale à une portion quelconque de la ligne, on décrit un arc indéfini qui aboutisse à la ligne donnée; on porte ensuite

Comment, à un point donné sur une ligne, fait-on, au moyen du compas de proportion, un angle d'un nombre donné de degrés?

cette même ouverture de compas sur le compas de proportion, du côté des lignes égales, en ouvrant celui-ci de manière à ce que les deux pointes du compas ordinaire tombent sur les deux nombres, sur chaque jambe du compas de proportion; on conserve cette ouverture du compas de proportion, et l'on augmente ou diminue celle du compas ordinaire, pour la porter sur les deux nombres pareils du compas de proportion, qui expriment le nombre de degrés de l'angle demandé; on porte cette dernière ouverture du compas ordinaire sur l'arc indéfini : le point d'intersection sera celui auquel il faudra mener une droite du point donné pour obtenir l'angle demandé.

135. *Chercher, avec le compas de proportion, une troisième proportionnelle à deux lignes données* (§. 86).

Comment cherche-t-on, avec le compas de proportion, une troisième proportionnelle à deux lignes données?

Pour chercher, avec le compas de proportion, une troisième proportionnelle à deux lignes données, il faut porter la plus grande des deux lignes données sur une des deux lignes des parties égales de l'instrument, de manière qu'une des extrémités soit au centre du compas de proportion; on ouvre ensuite l'instrument, s'il le faut, jusqu'à ce que la distance des extrémités de la plus grande ligne qui se trouve sur chaque branche de l'instrument, soit égale à la plus petite ligne : le compas de proportion restant ainsi ouvert, on place la longueur de la plus petite ligne sur l'une des branches de l'instrument, en

partant du centre : la distance comprise entre les deux extrémités de cette dernière ligne portée sur chaque branche de l'instrument est la troisième proportionnelle cherchée.

136. *Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données, au moyen du compas de proportion.*

Comment trouve-t-on une quatrième proportionnelle à trois lignes données, au moyen du compas de proportion?

Pour trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données au moyen du compas de proportion, on ouvre au besoin l'instrument jusqu'à ce que la distance dans les deux branches, entre les extrémités de la première ligne donnée, sur la face des parties égales, soit égale à la seconde ligne donnée; conservant la même ouverture de l'instrument, on place ensuite, à partir du centre de l'instrument, la troisième ligne donnée : la distance que l'on trouve dans les deux branches de l'instrument, entre les extrémités de la troisième ligne donnée, sera la quatrième proportionnelle demandée.

137. *Diviser, au moyen du compas de proportion, une ligne en une raison donnée quelconque, c'est-à-dire, de manière qu'en divisant la plus grande partie par la plus petite, ou la plus petite par la plus grande, on ait pour quotient une quantité donnée.*

Comment divise-t-on, au moyen du compas de proportion, une ligne en une raison donnée.

Pour diviser, au moyen du compas de proportion, une ligne en une raison donnée quelconque, on fait la somme du numérateur et du dénominateur de la fraction ou expression fractionnaire qui exprime la raison donnée; on

ouvre, au besoin, le compas de proportion jusqu'à ce que le nombre qui exprime cette somme se trouve dans les deux branches de l'instrument à une distance égale à la longueur de la ligne donnée. L'instrument demeurant ainsi ouvert, on prend la distance de numérateur à numérateur, et de dénominateur à dénominateur : ces distances seront les deux nombres cherchés qui expriment la raison donnée.

Soit, par exemple, proposé de diviser la ligne L en deux parties qui soient entr'elles comme 105 est à 35, et supposons que la ligne L vaille 84; j'additionne 105 et 35, ce qui me donne pour somme 140. J'ouvre le compas de proportion jusqu'à ce que la longueur 84 tombe sur le nombre 140 dans chaque branche de l'instrument, et conservant cette ouverture, je prends la distance de 105 à 105, qui est 63, et celle de 35 à 35, qui est 21. Les lignes 63 et 21 expriment une raison égale à celle de 105 à 35.

138. *D'un point donné sur une ligne, élever, avec le compas de proportion, une perpendiculaire sur cette ligne.*

Comment, d'un point donné sur une ligne, élève t on, avec le compas de proportion, une perpendiculaire sur cette ligne?

Pour élever d'un point donné sur une ligne, avec le compas de proportion, une perpendiculaire sur cette ligne, on décrit, du point donné comme centre, un arc indéfini qui aboutisse à la ligne donnée, et l'on ouvre le compas de proportion jusqu'à ce que les nombres 60 des deux branches de l'instrument soient à une distance égale au rayon de cet arc; après quoi, on prend la ligne qui se termine à 90 dans le com-

pas de proportion, et on la porte comme corde sur l'arc indéfini. Le point d'intersection sera celui par lequel on conduira du point donné la perpendiculaire demandée.

139. *Trouver, avec le compas de proportion, une ligne droite égale à la circonférence d'un cercle.*

Comme le diamètre d'un cercle est à sa circonférence à-peu-près comme 50 est à 157, pour trouver une ligne droite égale à la circonférence d'un cercle, au moyen du compas de proportion, on ouvre cet instrument jusqu'à ce que la distance de 50 à 50 dans les deux branches soit égale au diamètre du cercle. Le compas de proportion restant ainsi ouvert, la distance de 157 à 157 sera égale à la circonférence demandée.

Comment trouve-t-on, avec le compas de proportion, une ligne droite égale à la circonférence d'un cercle?

140. *Inscrire, avec le compas de proportion, un polygone régulier dans un cercle donné.*

On inscrit avec le compas de proportion un polygone régulier dans un cercle donné, en ouvrant le compas de proportion jusqu'à ce que la distance de 6 à 6 dans la ligne des polygones sur les deux branches soit égale au rayon du cercle donné; ensuite, conservant la même ouverture, on prend la distance entre les deux nombres qui, dans chaque branche, indiquent combien le polygone cherché doit avoir de côtés; cette dernière distance sera la longueur du côté du polygone cherché.

Comment inscrit-on, avec le compas de proportion, un polygone régulier dans un cercle donné?

Le problème suivant particularisera cette règle générale.

141. *Inscrire, avec le compas de proportion, un heptagone régulier dans un cercle donné.*

Comment inscrit-on, avec le compas de proportion, un heptagone régulier dans un cercle donné?

Pour inscrire, avec le compas de proportion, un heptagone régulier dans un cercle donné, on ouvre le compas de proportion jusqu'à ce que la distance de 6 à 6 dans la ligne des polygones, sur les deux branches, soit égale au rayon du cercle donné; ensuite, conservant la même ouverture, on prend la distance entre les deux nombres 7 qui se trouvent sur chaque branche. Cette distance sera la longueur qu'il faudra porter sept fois sur la circonférence, pour obtenir l'heptagone inscrit demandé.

142. *Sur une droite donnée décrire, avec le compas de proportion, un polygone régulier.*

Comment, sur une droite donnée, décrit-on, avec le compas de proportion, un polygone régulier?

Pour décrire, avec le compas de proportion, un polygone régulier sur une droite donnée, j'ouvre cet instrument du côté de la ligne des polygones, de manière à ce que la distance entre les deux nombres (sur chaque branche) qui indiquent le nombre des côtés du polygone cherché, soit égale à la droite donnée. L'instrument restant ainsi ouvert, je prends la distance de 6 à 6: cette distance sera le rayon du cercle dans lequel le polygone proposé doit être inscrit. En décrivant des deux extrémités de la ligne donnée, comme centres, et d'une ouverture de compas égale à ce rayon, deux arcs qui se coupent, le point d'intersection des deux arcs sera

le centre du polygone régulier demandé, et par conséquent le centre du cercle auquel ce polygone doit être inscrit, et dont la ligne donnée est un des côtés.

Le problème suivant est une application de ce cas général.

143. *Sur une droite donnée décrire, avec le compas de proportion, un octogone régulier.*

Comment, sur une droite donnée, décrit-on, avec le compas de proportion, un octogone régulier?

Pour décrire sur une droite donnée, avec le compas de proportion, un octogone régulier, on ouvre cet instrument du côté de la ligne des polygones, jusqu'à ce que les nombres 8 se trouvent, dans les deux branches, à une distance égale à la droite donnée. Conservant cette ouverture, on prend la distance des nombres 6 dans les deux branches; cette distance sera le rayon du cercle auquel l'octogone proposé doit être inscrit. En décrivant, des deux extrémités de la ligne donnée, comme centres, et d'une ouverture de compas égale à ce rayon, deux arcs qui se coupent, le point d'intersection des deux arcs sera le centre du polygone régulier demandé, et par conséquent le centre du cercle auquel cet octogone doit être inscrit, et dont la ligne donnée est un des côtés.

144. *Décrire, avec le compas de proportion, sur une droite donnée, un triangle isoscèle dont les angles à la base soient doubles chacun de l'angle au sommet.*

Comment, avec le compas de proportion, décrit-on, sur une droite donnée, un triangle isoscèle dont les angles à la

Pour décrire, avec le compas de proportion, sur une droite donnée, un triangle isoscèle dont les angles, à la base, soient doubles chacun

base soient doubles chacun de l'angle au sommet?

de l'angle au sommet, on ouvre cet instrument jusqu'à ce que la distance entre les nombres 10 et 10 de la ligne des polygones sur les deux branches soit égale à la droite donnée. Conservant cette ouverture, on prend la distance qui existe entre 6 et 6; cette distance sera la longueur de l'un ou l'autre des deux côtés égaux du triangle isoscèle cherché.

DES PLANS, DES POLYHÈDRES ET DES CORPS RONDS.

Combien de plans peut-on faire passer par une droite donnée?

145. Par une droite donnée on peut faire passer un nombre infini de plans.

Une ligne droite peut-elle déterminer la position d'un plan?

Ainsi une ligne droite ne peut déterminer la position d'un plan.

Quelle est la position de deux lignes droites qui se coupent?

146. Deux lignes droites qui se coupent sont dans le même plan, et en déterminent la position.

Car en faisant passer un plan par l'une des deux droites, ce plan comprendra un point de l'autre, celui où elles se coupent; on pourra donc faire tourner ce plan jusqu'à ce qu'il rencontre un autre point de la seconde ligne. Mais lorsque deux points d'une ligne droite sont dans un plan, la ligne entière est dans ce plan. Donc deux lignes droites ne peuvent se couper sans être dans le même plan.

Qu'est-ce qu'un angle bièdre?

147. On appelle angle *bièdre* celui qui est formé par deux plans.

Qu'est-ce qu'un angle trièdre?

148. L'angle formé par trois plans se nomme angle *trièdre*.

149. On donne le nom d'angle *tettrahèdre* à celui formé par quatre plans (1). Qu'est-ce qu'un angle tettrahèdre ?

150. En général, on appelle angle *polyhèdre* celui qui est formé par plus de deux plans : c'est un espace angulaire renfermé de tous côtés, à l'exception d'un seul, par des plans qui se réunissent en un même point. Qu'est-ce qu'un angle polyhèdre?

151. L'angle formé par deux plans, ou l'angle bihèdre, n'est autre chose que celui formé par les deux perpendiculaires menées dans chacun de ces plans au même point de l'intersection commune. En quoi consiste l'angle bihèdre?

152. Une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est perpendiculaire à toutes les droites qui passent par son pied dans le plan (2). Dans quel cas une droite est-elle perpendiculaire à un plan ?

153. Une ligne est parallèle à un plan, et des plans sont parallèles entr'eux dans le même cas où des lignes sont parallèles entr'elles. Dans quel cas une ligne est-elle perpendiculaire à un plan, et des plans sont-ils perpendiculaires entr'eux?

154. L'intersection commune de deux plans qui se rencontrent est une ligne droite. Quelle espèce de ligne est l'intersection commune de deux plans qui se rencontrent ?

155. Lorsque deux plans qui se rencontrent forment un angle droit, ces deux plans sont perpendiculaires entr'eux. Lorsque deux plans qui se rencontrent forment un angle droit, que résulte-t-il ?

156. Un triangle, ou bien trois points donnés dans l'espace, ou même deux lignes parallèles, déterminent la position d'un plan (§. 146).

(1) *Tettrahèdre* vient de deux mots grecs, TETTARA, qui signifie *quatre*, et ÉDRA, *siége, base.* Que signifie le mot tettrahèdre?

(2) On appelle *pied* de la perpendiculaire le point par lequel elle touche le plan. Qu'entend-on par pied de la perpendiculaire ?

Qu'appelle-t-on en général *polyhèdre* ?

157. On appelle en général *polyhèdre* toute étendue qui a trois dimensions, savoir : *longueur*, *largeur*, *hauteur*, ou *épaisseur*, ou *profondeur*, qui renferme un espace qui n'est ouvert d'aucun côté, et qui est terminé de toutes parts par des plans.

Comment nomme-t-on l'intersection commune de deux plans adjacens d'un polyhèdre ?

158. L'intersection commune de deux plans adjacens d'un polyhèdre s'appelle *arête* du polyhèdre.

Qu'entend-on par polyhèdre régulier ?

159. On nomme polyhèdre *régulier*, celui dont tous les plans sont des polygones réguliers égaux, et dont tous les angles polyhèdres sont égaux.

Qu'est-ce que la diagonale d'un polyhèdre ?

160. On appelle *diagonale* d'un polyhèdre la droite qui joint les sommets de deux angles polyhèdres non adjacens.

Qu'entend-on par sommets d'un polyhèdre ?

161. Les *sommets* d'un polyhèdre sont les points situés aux sommets de ses divers angles polyhèdres.

Qu'est-ce qu'un prisme ?

162. Le prisme est un polyhèdre compris sous plusieurs parallélogrammes terminés de part et d'autre par deux polygones identiques et parallèles.

Qu'appelle-t-on base d'un prisme ?

163. Les bases d'un prisme sont les deux polygones identiques parallèles.

Qu'est-ce que la surface latérale d'un prisme ?

164. On appelle *surface latérale* d'un prisme l'ensemble des parallélogrammes formés par les droites qui joignent les angles des deux bases, droites qui sont toutes égales.

Qu'est-ce que la hauteur d'un prisme ?

165. La *hauteur* d'un prisme est la distance qui existe entre ses deux bases ; ou, en d'autres

termes, c'est la perpendiculaire abaissée de la base supérieure sur la base inférieure.

166. Un prisme est *droit* lorsque les droites qui joignent les angles des bases sont perpendiculaires à ces bases. Dans quel cas un prisme est-il droit ?

167. Un prisme est *oblique* lorsque les droites qui joignent les angles des bases ne sont pas perpendiculaires à ces bases. Dans quel cas un prisme est-il oblique ?

168. Pour concevoir la formation d'un prisme il faut imaginer un polygone se mouvant parallélement à lui-même. Le sommet de chaque angle du polygone décrira une droite d'égale longueur ; et le prisme se trouvera ainsi formé. Comment conçoit-on la formation d'un prisme ?

169. Chaque droite qui joint les sommets des deux bases d'un prisme s'appelle *directrice*. Qu'entend-on par directrice d'un prisme ?

170. On appelle plan *générateur* d'un prisme l'une ou l'autre de ses bases. Qu'est-ce que le plan générateur d'un prisme ?

171. On appelle prisme *triangulaire* celui dont les deux bases sont des triangles. Qu'appelle-t-on prisme triangulaire ?

172. Le prisme *quadrangulaire* est celui dont les deux bases sont des quadrilatères. Qu'est-ce qu'un prisme quadrangulaire ?

173. Le *parallélépipède* est le prisme dont les deux bases sont des parallélogrammes, et par conséquent toutes les faces du parallélépipède sont des parallélogrammes. Qu'est-ce que le parallélépipède ?

174. Le *parallélépipède rectangle* est le prisme dont toutes les faces sont des rectangles. Qu'entend-on par parallélépipède rectangle ?

175. L'*hexaèdre régulier* ou *cube* est le parallélépipède rectangle dont toutes les faces sont des carrés identiques. Qu'est-ce que l'hexaèdre régulier ou cube ?

176. Une *pyramide* est un polyhèdre formé de plusieurs plans triangulaires qui partent d'un Qu'est-ce qu'une pyramide ?

même point et qui se terminent aux différens côtés d'un polygone appelé la *base* de la pyramide.

Qu'est-ce que la surface latérale de la pyramide?

177. Les plans triangulaires qui aboutissent à la base de la pyramide composent ce que l'on appelle la *surface latérale* de la pyramide.

Qu'entend-on par la hauteur d'une pyramide?

178. La hauteur d'une pyramide est la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base.

Qu'est-ce qu'une pyramide triangulaire, quadrangulaire, pentagonale, hexagonale, heptagonale?

179. Une pyramide est *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonale*, *hexagonale*, *heptagonale*, etc., selon que la base est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, un hexagone, un heptagone.

Qu'entend-on par axe d'une pyramide?

180. On nomme *axe* d'une pyramide la ligne droite qui, joignant le sommet de la pyramide au centre de la base, est perpendiculaire à cette base.

Dans quel cas une pyramide est-elle régulière?

181. Une pyramide est *régulière* lorsque la base est un polygone régulier, et que sa hauteur joint le sommet au centre du polygone.

Qu'est-ce qu'une pyramide oblique?

182. Une pyramide est *oblique* lorsque la base étant un polygone régulier, la ligne qui joint le sommet au centre de la base n'est pas la hauteur de la pyramide, et n'est par conséquent pas perpendiculaire à cette base.

Qu'entend-on par pyramide irrégulière?

183. Une pyramide est *irrégulière* lorsque sa base n'est pas un polygone régulier.

Quels sont les trois corps ronds?

184. Il y a trois corps que l'on appelle *ronds*, savoir : la *sphère*, le *cylindre* et le *cône*.

Qu'est-ce que la sphère?

185. La sphère est un corps engendré par la révolution d'un demi-cercle autour du diamètre.

186. Il résulte de cette définition que tous les points de la surface de la sphère sont également éloignés d'un point intérieur que l'on appelle centre. Quelle est la position de tous les points de la surface d'une sphère par rapport au centre de cette sphère?

187. On nomme *rayon* de la sphère la ligne droite qui joint le centre à un point quelconque de sa surface. Qu'appelle-t-on rayon de la sphère?

188. On appelle *axe* ou *diamètre* de la sphère la ligne droite qui joint deux points quelconques de sa surface et qui passe par le centre. Que nomme-t-on axe de la sphère?

189. On appellé *grand cercle* de la sphère toute section de la sphère faite par un plan qui passe par le centre de la sphère. Qu'est-ce qu'un grand cercle de la sphère?

190. On nomme *petit cercle* de la sphère toute section de la sphère faite par un plan qui ne passe pas par le centre de la sphère. Qu'est-ce qu'un petit cercle de la sphère?

191. Le *pôle* d'un cercle de la sphère est un point de sa surface également éloigné de tous les points de la circonférence de ce cercle. Qu'entend-on par pôle d'un cercle?

192. On appelle *pôles* d'un cercle, grand ou petit, les deux points de la surface de la sphère qui sont les extrémités d'une ligne perpendiculaire à ce cercle. Qu'entend-on par pôles d'un cercle grand ou petit?

193. On nomme *triangle sphérique* celui qui est formé par les plans de trois grands cercles qui se coupent deux à deux. Qu'est-ce qu'un triangle sphérique?

194. Un *polygone sphérique* est une partie de la surface de la sphère terminée par plus de trois arcs de grands cercles. Qu'est-ce qu'un polygone sphérique?

195. Une *zône* est une partie de la surface de la sphère comprise entre deux plans pa- Qu'est-ce qu'une zône?

rallèles qui coupent cette sphère, ou bien comprise entre deux plans parallèles dont l'un coupe la sphère et l'autre est tangent à cette sphère.

Qu'appelle-t-on bases d'une zône?

196. On appelle *bases* d'une zône les deux plans parallèles qui coupent la sphère et entre lesquels se trouve la zône.

Lorsqu'un des deux plans entre lesquels se trouve une zône est tangent à la sphère, combien cette zône a-t-elle de bases?

Lorsqu'un des deux plans parallèles est tangent à la sphère, la zône n'a qu'une base.

Qu'est-ce qu'un segment sphérique?

197. Un *segment sphérique* est le volume de la sphère compris entre la zône et ses bases.

Quelles sont les bases d'un segment sphérique?

198. Les *bases* d'un segment sphérique sont les mêmes que celles de la zône.

Qu'est-ce que la hauteur d'une zône ou d'un segment sphérique?

199. On nomme *hauteur* d'une zône ou d'un segment sphérique la distance des deux plans parallèles qui sont les bases de la zône ou du segment sphérique.

Qu'entend-on par secteur sphérique?

200. On appelle *secteur sphérique* le volume engendré par la révolution d'un rayon de la sphère autour d'un autre rayon immobile de la même sphère.

Qu'est-ce qu'un fuseau?

201. Un *fuseau* est une partie de la surface de la sphère comprise entre deux demi-grands cercles qui se terminent à un même diamètre.

Qu'est-ce qu'un quartier?

202. On appelle *quartier* le volume compris entre les deux plans de grands cercles qui forment le fuseau et le fuseau.

Comment s'appelle la base du quartier?

203. La base du quartier s'appelle *fuseau*.

Comment appelle-t-on tout plan qui ne touche la surface de la sphère qu'en un seul point?

204. On appelle *tangent à la sphère* tout plan qui ne touche la surface de la sphère qu'en un seul point.

205. On donne le nom de *cylindre* au volume produit par la révolution d'un rectangle autour d'un de ses côtés resté immobile. A quoi donne-t-on le nom de cylindre?

206. On appelle *surface convexe* du cylindre celle décrite par le côté du rectangle parallèle à celui qui est resté immobile dans la formation du cylindre. Qu'appelle-t-on surface convexe du cylindre?

207. On nomme *bases* du cylindre les deux cercles décrits par le mouvement des côtés du rectangle adjacens au côté immobile dans la formation du cylindre. Qu'entend-on par bases du cylindre?

208. La ligne qui reste immobile dans la formation du cylindre se nomme *axe du cylindre*. Qu'est-ce que l'axe du cylindre?

209. On appelle *rectangle générateur* celui qui a servi à former le cylindre. Qu'est-ce que le rectangle générateur?

210. On nomme *cône droit* le volume formé par la révolution d'un triangle rectangle autour d'un des côtés de l'angle droit. Qu'est-ce qu'un cône droit?

211. On nomme *base du cône droit* le cercle décrit par celui des deux côtés de l'angle droit du triangle rectangle qui tourne dans la formation de ce cône. Qu'est-ce que la base du cône droit?

212. *La surface convexe du cône droit* est celle qui enveloppe ce corps de tous côtés, et qui est décrite par le mouvement de l'hypoténuse dans la formation de ce corps. Qu'est-ce que la surface convexe du cône droit?

213. *L'axe* ou *la hauteur du cône droit* est le côté immobile du triangle rectangle autour duquel s'engendre le cône droit. Ce côté immobile joint le sommet au centre de la base et est perpendiculaire à cette base. Qu'est-ce que l'axe ou la hauteur du cône droit?

Qu'est-ce que l'apothème ou côté du cône droit?

214. On appelle *apothème* ou *côté* du cône droit la ligne droite qui joint le sommet à un point de la circonférence de la base.

Qu'est-ce qu'un tronc de cône droit?

215. Si d'*un cône droit* on retranche la partie supérieure par un plan parallèle à la base, la partie inférieure prend le nom de *tronc de cône droit*.

Combien un tronc de cône a-t-il de bases?

Un tronc de cône a toujours deux bases.

Ce qui va suivre est l'abrégé d'un *Traité spécial de Géométrie*, que je publierai à part au commencement de 1832.

D'un point donné hors d'un plan combien peut-on abaisser de perpendiculaires à ce plan?

216. *D'un point donné hors d'un plan, on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire à ce plan.*

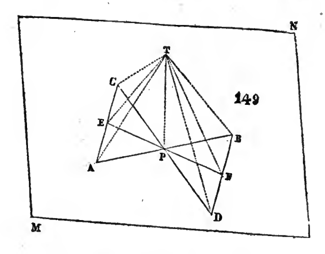
Car si l'on pouvait en abaisser deux, il s'ensuivrait que d'un même point pris sur une droite on pourrait élever deux perpendiculaires sur cette droite, ce que nous avons vu être impossible (Tom. II, §. 583).

Si une droite est perpendiculaire à deux droites qui passent par son pied dans un plan, que s'ensuit-il?

217. *Si une droite est perpendiculaire à deux droites qui passent par son pied dans un plan, elle sera perpendiculaire à toute autre droite tracée dans le même plan, et qui passe par son pied, et sera par conséquent perpendiculaire à ce plan.*

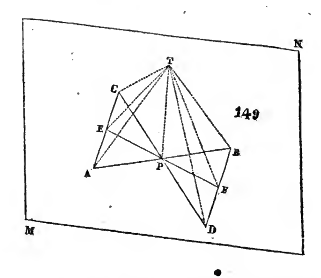
Soit (fig. 149) la droite TP *in sublimi* (1), perpendiculaire aux droites AB, CD, tracées

(1) *In sublimi* est latin, et signifie *en l'air*. Les lignes *in sublimi* sont pointées.



dans le plan MN et passant par son pied P; je dis que la droite TP est aussi perpendiculaire à toute autre droite EF passant par ce pied dans le même plan.

Faisons la droite AB de telle longueur que P en soit le milieu; faisons de même la droite CD de telle longueur que le milieu en soit le point P, et joignons AC, BD. Les triangles ACP, BDP, seront identiques, comme ayant les côtés AP, CP respectivement égaux aux côtés BP, DP, et les angles en P égaux comme opposés au sommet (Tom. II, §. 502); et puisque dans les triangles identiques les angles égaux sont opposés aux côtés égaux (Tom. II, §. 502, Corollaire), il s'ensuit que l'angle ACP est égal à l'angle BDP. Donc les triangles CEP, DFP sont identiques comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun (Tom. II,



§. 503). Donc EP = FP. Il est donc déjà prouvé que le point P est à égale distance des extrémités de la ligne EF ; prouvons aussi que le point T est également éloigné des mêmes extrémités. Or, les triangles ACT, BDT sont identiques ; car d'abord les bases AC, BD sont égales, comme nous venons de le voir; de plus, TP étant, par hypothèse, perpendiculaire au milieu de CD, le point T est également éloigné des extrémités C et D (§. 54) ; donc la distance CT est égale à la distance DT. De même, TP étant, par hypothèse, perpendiculaire au milieu de AB, le point T est également éloigné des extrémités A et B (§. 54) ; donc la distance AT est égale à la distance BT. Donc les triangles ACT, BDT ont les côtés égaux chacun à chacun ; donc ils sont identiques (Tom. II, §. 508) ; et comme,

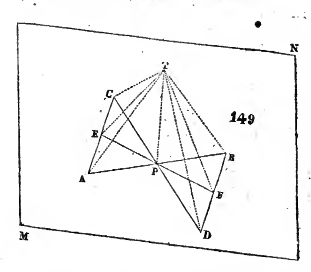
dans les triangles identiques, les angles égaux sont opposés aux côtés égaux (Tom. II, §. 502, Corollaire), il s'ensuit que l'angle TBD ou TBF est égal à l'angle CAT ou EAT. Donc les triangles BFT, AEF sont identiques comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun (Tom. II, §. 502), savoir, les côtés AE, AT égaux respectivement aux côtés BF, FT, et l'angle EAT compris par les premiers égal à l'angle FBT compris par les derniers. Donc le côté ET, opposé à l'angle EAT, est égal au côté FT opposé à l'angle FBT. Donc le point T est également éloigné des extrémités E, F de la droite EF; et comme le point P est aussi à égale distance de E et de F, la droite PT a deux de ses points également éloignés de E et de F; donc (§. 55) la droite PT est perpendiculaire à la droite EF; mais la droite EF est une droite quelconque qui passe par le pied de la droite PT dans le plan MN; donc la droite PT, qui, par hypothèse, est perpendiculaire aux deux droites AB, CD, est perpendiculaire à toutes les droites qui passent par son pied dans le même plan; donc elle est perpendiculaire à ce plan.

Ce qu'il fallait démontrer.

218. *La perpendiculaire à un plan est plus courte que toutes les droites menées de la tête de la perpendiculaire à ce plan.*

Quelle est la grandeur relative de la perpendiculaire à un plan par rapport aux droites qui partent de la tête de cette perpendiculaire pour aller aboutir à ce plan?

Soit (fig. 149) la droite TP perpendiculaire au plan MN. Je dis que la droite TP est plus courte que chacune des obliques CT, ET, AT, DT, FT, BT.



Il suffira de prouver cette vérité pour l'une quelconque de ces obliques, pour CT, par exemple; elle sera alors prouvée pour toutes.

Or, les droites TP et CT se coupant au point T, sont dans le même plan (§. 146), ainsi que CP; et comme TP est, par hypothèse, et d'après la proposition précédente, perpendiculaire à CP, la droite CT, qui est une oblique par rapport à cette perpendiculaire, est plus longue que cette perpendiculaire (Tom. II, §. 542).

Ce qu'il fallait démontrer.

Une ligne étant perpendiculaire à un plan, quelle est la vraie distance à ce plan de la tête de la perpendiculaire ?

219. Corollaire. *Donc toute ligne perpendiculaire à un plan mesure la vraie distance de la tête de la perpendiculaire à ce plan.*

Par un point donné sur un plan, combien peut-on mener de perpendiculaires à ce plan?

220. *Par un point donné sur un plan on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire à ce plan.*

Car, supposons un instant (fig. 149) que l'on puisse élever deux perpendiculaires sur le plan MN au point P. Faisons passer suivant ces deux perpendiculaires un plan qui fasse une section quelconque PB avec le plan MN. On aurait alors deux perpendiculaires à une ligne droite élevées d'un même point de cette droite dans le même plan, ce qui est impossible (Tom. II, §. 583).

Ce qu'il fallait démontrer.

221. *Par un point donné hors d'un plan, on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire à ce plan.*

Par un point donné hors d'un plan, combien peut-on abaisser de perpendiculaires à ce plan?

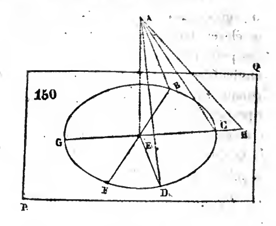
Car s'il était possible d'abaisser, par exemple, deux perpendiculaires TP, TB du point T (fig. 149) au plan MN, on pourrait faire passer suivant ces deux perpendiculaires un plan qui fît une section quelconque PB avec le plan MN. On aurait alors un triangle PTB qui aurait deux angles droits, l'un en P et l'autre en B; ce qui est absurde.

222. *Si trois droites sont perpendiculaires à une quatrième droite au même point de cette droite, ces trois premières droites seront dans un seul et même plan auquel la quatrième droite est perpendiculaire* (§. 217).

Si trois droites sont perpendiculaires au même point d'une quatrième droite, dans combien de plans trois droites sont-elles susceptibles de se trouver?

223. *Les obliques menées à un plan de la tête de la perpendiculaire à ce plan ou de tout autre point de la perpendiculaire à égale distance du pied de la perpendiculaire, sont égales.*

Quelle grandeur ont, entr'elles, les obliques menées à un plan de la tête de la perpendiculaire à ce plan ou de tout autre point de la perpendiculaire à égale distance du pied de la perpendiculaire?



Soit (fig. 150) la droite AE perpendiculaire au plan PQ. Soit décrite du point E la circonférence BCDG, et soient menées de la tête A de la perpendiculaire les obliques AB, AC, AD, qui se trouvent ainsi également éloignées du pied E de la perpendiculaire AE. Je dis que ces obliques sont égales.

Car les triangles ABE, ACE, ADE étant, par hypothèse, rectangles en E, et ayant par conséquent un angle droit compris entre côtés égaux chacun à chacun, sont identiques, et comme les angles égaux sont opposés aux côtés égaux, il s'ensuit que les hypoténuses AB, AC, AD sont égales.

Ce qu'il fallait démontrer.

De toutes les obliques menées à un plan de la tête de la perpendiculaire à ce plan ou de tout autre point de la perpendiculaire, quelle est la plus longue?

224. *De toutes les obliques menées à un plan de la tête de la perpendiculaire à ce plan, ou de tout autre point de la perpendiculaire, celle qui s'écarte le plus du pied de la perpendiculaire est la plus longue.*

Soit encore (fig. 150) la droite AE perpendiculaire au plan PQ. Soit BCDG une circonférence dont le centre est le pied E de cette perpendiculaire. Je dis que l'oblique AH est plus longue que l'oblique AC.

Car l'angle AEH étant droit par hypothèse, il s'ensuit que l'angle ACE est aigu, et que par conséquent l'angle ACH est obtus; donc l'oblique AH est plus grande que l'oblique AC (Tom. II, §. 521).

Ce qu'il fallait démontrer.

225. *Donc toutes les obliques égales menées à un plan d'un point* IN SUBLIMI, *aboutissent à une circonférence dont le centre est le pied de la perpendiculaire abaissée sur ce plan de ce point* IN SUBLIMI.

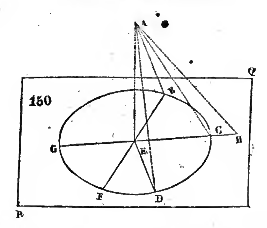
Où aboutissent toutes les obliques égales menées à un plan d'un point IN SUBLIMI?

226. *Donc, d'un point donné hors d'un plan on abaisse une perpendiculaire à ce plan en menant à ce plan du point donné trois droites égales, et en faisant passer une circonférence par les trois points où ces droites rencontrent le plan : le centre de cette circonférence est le point où la perpendiculaire demandée doit rencontrer le plan.*

Comment, d'un point donné hors d'un plan, abaisse-t-on une perpendiculaire à ce plan?

En effet, soient (fig. 150) menées trois obliques égales AB, AC, AD, du point A *in sublimi*, à trois points quelconques B, C, D, du plan PQ. Par ces trois points faisons passer une circonférence BCDG. Je dis que la droite qui joindra le point A au point E sera perpendiculaire au plan PQ.

Car d'abord les distances AF, AB sont égales



(§. 223), puisque EB, EF sont, par construction, des rayons du même cercle; donc la droite AE a deux de ses points A, E, dont chacun est également éloigné de B et de F; donc elle est perpendiculaire au milieu de la droite BF.

De même, les distances AG, AC sont égales (§. 223), puisque EC, EG sont, par construction, des rayons du même cercle; donc la droite AE a deux de ses points A, E, dont chacun est également éloigné de C et de G; donc elle est perpendiculaire au milieu de la droite CG.

Mais la droite AE étant à-la-fois perpendiculaire aux deux droites BF, CG, qui passent par son pied dans le plan PQ, est perpendiculaire au plan PQ (§. 217).

Ce qu'il fallait trouver et démontrer.

Quelle différence y a-t-il entre les angles que forment avec un plan plusieurs droites égales qui, partant d'un même point IN SUBLIMI d'une perpendiculaire à un plan, viennent aboutir à ce plan?

227. *Toutes les droites qui, partant d'un même point* IN SUBLIMI *d'une ligne perpendiculaire à un plan, vont aboutir à ce plan à égale distance du pied de la perpendiculaire, et*

sont par conséquent égales, forment avec ce plan des angles égaux, c'est-à-dire qu'elles sont également inclinées sur ce plan.

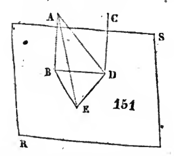
Soit (fig. 150) la droite AE perpendiculaire au plan PQ, et soit le pied E de cette perpendiculaire le centre du cercle BCDG. Je dis que les droites AB, AC, AD, qui sont des obliques égales (§. 223), font avec le plan PQ des angles égaux.

En effet, les triangles ABE, ACE, ADE, sont identiques, comme ayant le côté commun AE, pour second côté le rayon du même cercle, et pour troisième côté une des obliques égales; et comme dans les triangles identiques les angles égaux sont opposés aux côtés égaux, il s'ensuit que les angles ABE, ACE, ADE, sont égaux; car ils sont tous opposés au même côté AE.

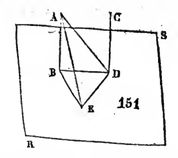
Ce qu'il fallait démontrer.

228. *Si deux droites sont perpendiculaires sur le même plan, ces deux droites seront parallèles.*

Si deux droites sont perpendiculaires sur le même plan, que seront ces deux droites entr'elles?



Soient (fig. 151) les droites AB, CD perpendiculaires au plan RS, qu'elles rencontrent aux points B,D, et tirons BD. Du point D, et dans le plan RS, menons une droite DE égale à AB



et perpendiculaire à la ligne BD qui est aussi dans le plan RS; joignons BE, AE et AD.

Puisque la droite AB est perpendiculaire sur le plan RS, elle est perpendiculaire sur toutes les droites qui passent par son pied dans ce plan (§. 152); mais les droites BD, BE, qui sont dans le plan RS, passent par son pied; donc les angles ABD, ABE sont tous deux droits; il en est de même des angles CDB, CDE. Mais puisque, par construction, la droite DE est égale à la droite AB, et que la droite BD est commune, les deux droites DE, DB sont égales aux deux droites AB, DB. Mais ces droites comprennent des angles droits. Donc les triangles BDE, BDA ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun; donc ils sont identiques (Tom. II, §. 502), et par conséquent le troisième côté BE est égal au troisième côté AD; et puisque la droite DE est égale à la droite AB, et la droite BE égale à la droite AD, les deux droites DE, AD sont égales aux deux droites AB, BE. Mais la droite AE est commune aux deux triangles ADE, ABE; donc ces deux triangles ont les trois côtés égaux cha-

cun à chacun; donc ils sont identiques (Tom. II, §. 508); et comme dans les triangles identiques les angles égaux sont opposés aux côtés égaux (Tom. II, §. 502, Coroll.), il s'ensuit que l'angle ADE est égal à l'angle ABE. Mais l'angle ABE est droit par hypothèse; donc l'angle ADE est droit aussi. Donc la droite DE est perpendiculaire à la droite AD. Mais la droite DE est aussi perpendiculaire à l'une et l'autre des droites BD, CD. Donc les trois droites BD, AD, CD sont dans le même plan (§. 222); mais la droite AB est dans le même plan que les droites BD, AD (§. 146), puisqu'elle a deux points communs avec ces deux lignes. Donc les trois droites AB, BD, CD sont dans un seul et même plan. Mais les droites AB, CD sont, par hypothèse, perpendiculaires à la droite BD. Donc (Tom. II, §. 501), les droites AB, CD sont parallèles.

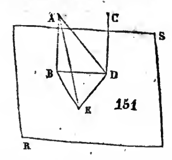
Ce qu'il fallait démontrer.

229. *Si deux droites sont parallèles, et si l'une d'elles est perpendiculaire à un plan, l'autre sera perpendiculaire à ce même plan.*

Si deux droites sont parallèles, et si l'une d'elles est perpendiculaire à un plan, quelle sera la propriété de l'autre par rapport à ce même plan?

Soient (fig. 151) les droites AB, CD, qui rencontrent le plan RS, parallèles entr'elles, et soit AB perpendiculaire à ce plan : je dis que CD est perpendiculaire à ce même plan.

Joignons BD. Les droites AB, BD, CD seront dans le même plan (§§. 146 et 156). Conduisons dans le plan RS la droite DE perpendiculaire à BD et égale à AB, et menons BE, AE, AD. Puisque AB est perpendiculaire au plan RS, elle



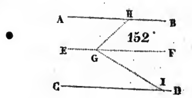
sera perpendiculaire à toutes les droites qui passent par son pied dans ce plan (§. 152); donc les angles ABD, ABE sont droits l'un et l'autre; et comme la droite BD rencontre les droites AB, CD, les angles ABD, CDB valent ensemble deux angles droits (Tom. II, §. 526). Mais l'angle ABD est droit: donc l'angle CDB l'est aussi. Donc CD est perpendiculaire à BD. Mais la droite DE est, par construction, égale à la droite AB, et la droite BD est commune; donc les deux droites DE, BD sont égales, chacune à chacune, aux deux droites AB, BD. Mais l'angle EDB est égal à l'angle ABD, car ils sont droits l'un et l'autre: donc les triangles BDE, ABD ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun; donc ils sont identiques (Tom. II, §. 502); donc le côté AD est égal au côté BE; et puisque DE est égal à AB, et que AD est égal à BE, les deux droites DE, AD sont égales aux deux droites AB, BE. Donc les deux triangles ADE, ABE ont deux côtés égaux chacun à chacun et le troisième côté AE commun; donc ils sont identiques (Tom. II, §. 508); et les angles égaux étant opposés aux côtés égaux

(Tom. II, §. 502, Coroll.), l'angle ADE est égal à l'angle ABE. Mais l'angle ABE est droit par hypothèse; donc l'angle ADE l'est aussi. Donc la droite DE, qui était déjà, par construction, perpendiculaire à BD est aussi perpendiculaire à AD; donc elle est perpendiculaire au plan ABD (§. 217) dans lequel se trouve aussi la perpendiculaire CD; donc la droite DE est aussi perpendiculaire à la droite CD. Donc la droite CD est à-la-fois perpendiculaire aux droites BD, DE qui sont dans le plan RS; donc elle est perpendiculaire à ce plan (§. 217).

Ce qu'il fallait démontrer.

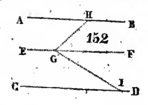
230. *Les droites qui sont parallèles à une même droite, sans être dans le même plan que cette droite, n'en sont pas moins parallèles entr'elles.*

Que sont entr'elles deux droites qui sont parallèles à une même droite sans être dans le même plan que cette droite?



Soient (fig. 152) les droites AB, CD parallèles à la droite EF qui n'est pas dans le même plan: je dis que la droite AB est parallèle à la droite CD.

Prenons sur EF un point quelconque G, et de ce point menons dans le plan qui passe par EF et AB la droite GH perpendiculaire à EF. De ce même point G, et dans le plan qui passe



par EF et CD menons la droite GI perpendiculaire aussi à EF.

Puisque la droite EF est perpendiculaire à l'une et l'autre des droites GH, GI, elle est aussi perpendiculaire au plan qui passe par les droites GH, GI (§. 217). Mais AB est parallèle à EF : donc AB est perpendiculaire au plan qui passe par les points H, G, I (§. 229). Par une raison semblable, CD est perpendiculaire au plan qui passe par les points H, G, I : donc les droites AB, CD sont perpendiculaires au plan qui passe par les points G, H, I ; donc la droite AB est parallèle à la droite CD (§. 228).

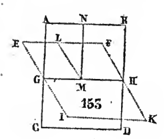
Ce qu'il fallait démontrer.

Si deux plans se coupent à angles droits, et que dans l'un d'eux on mène une ligne perpendiculaire à leur commune section, que sera cette ligne par rapport à l'autre plan ?

231. *Si deux plans se coupent à angles droits, et que dans l'un d'eux on mène une ligne perpendiculaire à leur commune section, cette ligne sera perpendiculaire à l'autre plan.*

Soit (fig. 153) le plan ABCD que nous supposerons coupé à angles droits suivant GH par le plan EFIK. Soit tirée la ligne NM perpendiculairement dans le plan ABCD à la commune section GH : je dis que la ligne NM sera perpendiculaire à l'autre plan EFIK.

Car menons dans le plan EFIK, perpendicu-



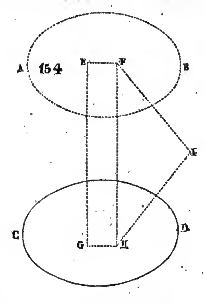
lairement à la commune section GH, la ligne LM. Les lignes LM, NM étant, par construction, perpendiculaires à la commune section GH, l'angle LMN est l'angle d'inclinaison des deux plans (§. 151). Mais par hypothèse les deux plans ABCD, EFIK se coupant à angles droits, l'angle d'inclinaison LMN est un angle droit; et puisque la ligne NM est perpendiculaire aux deux lignes GH, LM, menées dans le plan EFIK, elle est perpendiculaire à ce plan (§. 217).

Ce qu'il fallait démontrer.

232. Corollaire. *Si deux plans se rencontrent, ils formeront entr'eux deux angles égaux ensemble à la somme de deux angles droits.* Si deux plans se rencontrent, quels angles feront-ils entr'eux, et à quoi leur somme sera-t-elle égale?

233. Corollaire. *Si deux plans se coupent, les angles opposés au sommet sont égaux.* Si deux plans se coupent, que seront les angles opposés au sommet?

234. *Les intersections de deux plans parallèles par un troisième plan sont parallèles.* Que sont entr'elles les intersections de deux plans parallèles par un troisième plan?



Soient (fig. 154) les deux plans parallèles AB, CD, et supposons-les coupés par un plan quelconque EFGH, de manière que leurs intersections soient EF, GH : je dis que ces intersections sont parallèles.

Car, supposons que EF ne soit pas parallèle à GH; alors, ces deux lignes étant prolongées suffisamment se rencontreront ou du côté des points F, H, ou du côté des points E, G. Prolongeons ces droites du côté des points F, H, jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en un point quelconque I. Puisque EFI est dans le plan AB, tous les points pris dans EFI seront dans le même plan. Mais le point I est un des points pris sur EFI; donc le point I est dans le plan AB. Par une raison semblable, le point I est dans le plan CD. Donc les plans AB, CD, pro-

longés, se rencontreront. Mais, par hypothèse, ces deux plans sont parallèles, et ne peuvent par conséquent se rencontrer. Donc les lignes EF, GH, étant prolongées du côté des points F, H, ne pourront jamais se rencontrer.

Nous démontrerions de la même manière que ces mêmes lignes étant prolongées du côté des points E, G, ne se rencontreraient pas non plus. Donc elles sont parallèles.

Ce qu'il fallait démontrer.

235. *Si deux plans sont parallèles entr'eux, la ligne qui est perpendiculaire à l'un est aussi perpendiculaire à l'autre.*

Si deux plans sont parallèles entr'eux, la ligne qui est perpendiculaire à l'un que sera-t-elle par rapport à l'autre?

Soient (fig. 154) les plans AB, CD parallèles entr'eux, et soit la ligne EG perpendiculaire au plan CD; je dis que la ligne EG est aussi perpendiculaire au plan AB.

Du point E de la perpendiculaire EG, et dans le plan AB, menons dans une direction quelconque la ligne EF, et conduisons suivant EG et EF un plan GEF dont l'intersection avec le plan CD soit GH; l'intersection GH sera parallèle à EF (§. 234); mais la ligne EG, qui est, par hypothèse, perpendiculaire au plan CD, est perpendiculaire à la ligne GH; donc elle est aussi perpendiculaire à sa parallèle EF; et puisque la ligne EG est perpendiculaire à toute ligne EF qui passe par son pied (1) dans

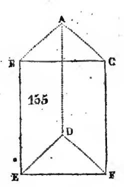
(1) Lorsqu'une ligne perpendiculaire est comprise entre deux plans, chacune de ses extrémités s'appelle le pied.

le plan AB, il s'ensuit qu'elle est perpendiculaire au plan AB.

Ce qu'il fallait démontrer.

Si deux lignes qui se rencontrent sont parallèles à deux autres lignes qui se rencontrent aussi, quoique non dans le même plan que les premières, que sont les angles formés par ces lignes?

236. *Si deux lignes qui se rencontrent sont parallèles à deux autres lignes qui se rencontrent aussi, quoique non dans le même plan que les premières, les angles formés par ces lignes sont égaux.*



Soient (fig. 155) les lignes AB, AC respectivement parallèles aux lignes DE, DF qui ne sont pas dans les mêmes plans que les premières; je dis que l'angle formé par les lignes AB, AC est égal à l'angle formé par les lignes DE, DF.

Faisons les lignes AB, AC, DE, DF égales entr'elles, et joignons BC, EF, BE, AD, CF.

Les lignes AD, BE, qui joignent les lignes égales et parallèles AB, DE, sont égales et parallèles (Tom. II, §. 546). Par la même raison AD, CF sont égales et parallèles. Donc BE, CF sont égales et parallèles; et par conséquent BC, EF le sont aussi (Tom. II, §. 546). Les deux triangles ABC, DEF ont donc les côtés égaux chacun à chacun: donc

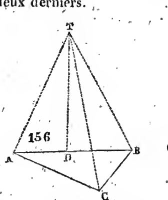
ils sont identiques (Tom. II, §. 508). Donc l'angle BAC, opposé au côté BC, est égal à l'angle EDF, opposé au côté EF.

Ce qu'il fallait démontrer.

237. *La somme de deux quelconques des trois angles plans qui forment un angle trihèdre est toujours plus grande que le troisième.*

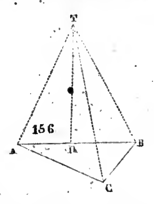
La somme de deux quelconques des trois angles plans qui forment un angle trihèdre de quelle grandeur est-elle toujours par rapport au troisième angle?

D'abord si ces trois angles étaient égaux, il est clair que la somme de deux d'entr'eux serait plus grande que le troisième. La proposition n'est donc susceptible d'être démontrée qu'autant que l'angle plan que l'on compare à la somme des deux autres est plus grand que chacun des deux derniers.



Soient (fig. 156) les angles plans ATB, ATC, BTC qui concourent à former l'angle trihèdre dont le sommet est T, et supposons que l'angle ATB soit plus grand que l'angle BTC; je dis qu'on aura ATC+BTC>ATB.

Joignons les points A et B par la droite AB, et dans le plan ATB faisons l'angle BTD égal à l'angle BTC. Supposons encore la droite TD



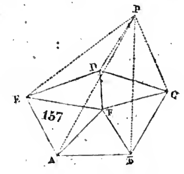
égale à TC, ce qui est toujours permis, puisque l'on peut prolonger les jambes d'un angle sans affecter la grandeur de l'angle.

Les deux côtés BT, DT sont égaux aux deux côtés BT, CT par hypothèse; l'angle BTD est égal à l'angle BTC par construction; donc les deux triangles BTD, BTC sont identiques (Tom. II, §. 502); donc BD=BC. Mais on a AC+BC>AB (Tom. II, §. 517). Retranchant d'un côté BD, et de l'autre BC qui lui est égal, il reste AC>AD. Les deux côtés AT, DT sont égaux aux deux côtés AT, CT; le troisième AD étant, comme on vient de le voir, plus petit que le troisième AC, l'angle ATD est plus petit que l'angle ATC (Tom. II, §. 519). Ajoutant l'angle BTD=BTC, on aura ATD+BTD, ou ATB<ATC+BTC.

Ce qu'il fallait démontrer.

Quelle est la mesure que ne peuvent atteindre un nombre quelconque d'angles plans qui concourent à former un angle polyhèdre?

238. *Quel que soit le nombre d'angles plans qui concourent à former un angle polyhèdre convexe, leur somme sera toujours moindre que quatre angles droits.*



Soit (fig. 157) l'angle polyèdre convexe dont le sommet est P, et coupons cet angle par le plan ABCDE. Les angles plans qui concourent à former cet angle polyèdre sont au nombre de 5, savoir : APB, BPC, CPD, DPE, APE. D'un point F pris dans le plan ABCDE menons à tous les angles les lignes FA, FB, FC, FD, FE.

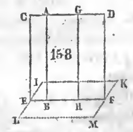
La somme des angles des triangles APB, BPC, CPD, DPE, APE formés autour du sommet P est égale à la somme des angles d'un même nombre de triangles FAB, FBC, FCD, FDE, FAE formés autour du sommet F. Mais au point A les angles EAF, FAB, pris ensemble, font l'angle EAB qui est plus petit que la somme des angles EAP, PAB (§. 237). De même au point B on a ABF+FBC, ou ABC<ABP+PBC. Le raisonnement serait le même pour tous les angles du polygone ABCDE. Donc dans les triangles dont le sommet est en F, la somme des angles à la base est plus petite que la somme des angles à la base dans les triangles dont le sommet est en P; donc la somme des angles formés

autour du point F est plus grande que la somme des angles formés autour du point P. Mais la somme des angles formés autour du point F est égale à 4 angles droits (Tom. II, §. 511). Donc la somme des angles plans qui forment l'angle polyhèdre dont le sommet est P est moindre que quatre angles droits.

Ce qu'il fallait démontrer.

Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, quelle est la propriété de tous les plans qui passent par cette droite ?

239. *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, tous les plans qui passent par cette droite sont perpendiculaires à ce même plan.*



Soit (fig. 158) la droite AB perpendiculaire au plan IKML, et faisons passer par cette droite le plan CDFE. Je dis que ce plan sera perpendiculaire au plan IKML.

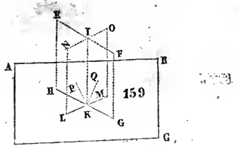
Supposons que la droite EF soit la commune section des plans IKML, CDFE. Prenons sur la droite EF un point quelconque H; de ce point, et dans le plan CDFE, conduisons la droite HG perpendiculaire à la droite EF. Puisque la droite AB est, par hypothèse, perpendiculaire au plan IKML, elle sera perpendiculaire à toutes les droites qui passent par son pied dans ce plan; donc la droite AB est perpendiculaire à la droite

EF. Donc l'angle ABH est droit. Mais l'angle GHB est droit aussi ; donc AB est parallèle à HG (Tom. II, §. 529). Mais AB est, par hypothèse, perpendiculaire au plan IKML : donc HG sera perpendiculaire à ce même plan (§. 229). Mais un plan est perpendiculaire à un plan lorsque les droites menées dans l'un de ces plans sont perpendiculaires à leur commune section et à l'autre plan; donc le plan CDFE, qui passe par la droite HG, est perpendiculaire au plan IKLM.

Ce qu'il fallait démontrer.

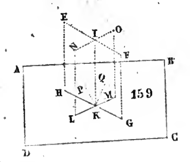
240. *Si deux plans qui se coupent sont perpendiculaires à un plan donné, leur commune section sera perpendiculaire à ce plan.*

Si deux plans qui se coupent sont perpendiculaires à un plan donné, que sera leur commune section par rapport à ce plan donné ?



Soient (fig. 159) les plans EFGH, NOML, qui se coupent et qui sont perpendiculaires au plan ABCD, et soit IK leur commune section. Je dis que la droite IK est perpendiculaire au plan ABCD.

Car, supposons que cela ne soit point; du point K menons dans le plan EFGH la droite KQ perpendiculaire à la droite GH, commune



section des plans ABCD, EFGH; et du même point K, mais dans le plan NOML, menons la droite KP perpendiculaire à la droite LM, commune section des plans ABCD, NOML.

Puisque, par hypothèse, le plan ABCD est perpendiculaire au plan EFGH, et que la droite KQ a été menée dans le plan EFGH perpendiculairement à la commune section GH de ces plans, la droite KQ sera perpendiculaire au plan ABCD.

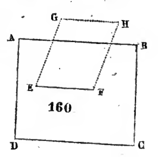
De même, puisque, par hypothèse, le plan ABCD est perpendiculaire au plan NOML, et que la droite KP a été menée dans le plan NOML perpendiculairement à la commune section LM de ces plans, la droite KP sera perpendiculaire au plan ABCD.

Donc d'un même point K on a élevé deux perpendiculaires sur un même plan, ce qui est impossible (§. 220).

Ce qu'il fallait démontrer.

Si une droite menée dans un plan est parallèle à une droite menée dans un autre plan, que sera-t-elle par rapport à ce dernier plan ?

241. *Si une droite menée dans un plan est parallèle à une droite menée dans un autre plan, elle sera parallèle à ce dernier plan.*

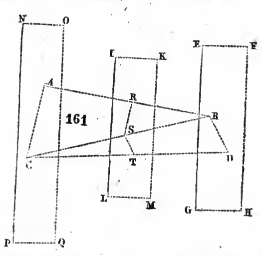


Soit (fig. 160) le plan ABCD, et soit dans ce plan la droite EF parallèle à la droite GH hors de ce plan. Je dis que la droite GH est parallèle au plan ABCD.

Car si la droite GH, qui est dans le plan GHFE, rencontrait le plan ABCD, ce ne pourrait être qu'en quelque point de la droite EF, intersection commune des deux plans; or, GH ne peut rencontrer EF, puisque, par hypothèse, elle lui est parallèle; donc elle ne rencontrera pas non plus le plan ABCD; donc elle est parallèle à ce plan.

Ce qu'il fallait démontrer.

242. *Deux droites situées entre trois plans parallèles, sont coupées en parties proportionnelles par le plan du milieu.* Comment sont coupées deux droites situées entre trois plans parallèles?



Soient (fig. 161) les deux droites AB, CD situées entre les plans parallèles NOQP, EFHG qu'elles rencontrent aux points A, C, B, D, en traversant le plan IKML qu'elles rencontrent aux points R, T, et qui est parallèle aux deux premiers ; je dis que l'on a cette proportion :

$$AR : BR :: CT : DT \ (\alpha).$$

En effet, tirons AB et CD, ainsi que BC. Faisons passer un plan par AB et BC, et un autre par CD et BC.

L'intersection commune des plans ABC, NOQP est AC. L'intersection commune RS des plans ABC, IKML, quelle qu'elle soit, doit être parallèle à l'intersection AC (§. 234).

Donc (§. 15) dans le triangle ABC on obtient cette proportion :

$$AR : BR :: CS : BS \ (\beta).$$

L'intersection commune des plans BCD, EFHG est BD. L'intersection commune TS des plans BCD, IKML, quelle qu'elle soit, doit être parallèle à l'intersection BD (§. 234).

Donc (§. 15) dans le triangle BCD on a cette proportion :

$$CS : BS :: CT : DT \ (\gamma).$$

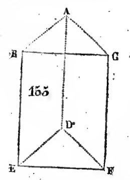
Prenant dans la proportion (β) le rapport AR : BR, et dans la proportion (γ) le rapport CT : DT qui lui est égal, on en forme cette nouvelle proportion :

$$AR : BR :: CT : DT \ (\delta).$$

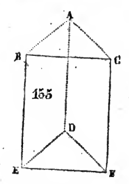
Ce qu'il fallait démontrer.

243. *Si l'on joint les extrémités de trois droites égales et parallèles situées dans des plans différens, on formera avec les lignes de jonction deux triangles identiques dont les plans seront parallèles.*

Si l'on joint les extrémités de trois droites égales et parallèles situées dans des plans différens, que formera-t-on avec les lignes de jonction?



Soient (fig. 155) les droites égales et parallèles BE, AD, CF, non situées dans le même plan, et joignons d'un côté AB, AC, BC, et de l'autre DE, DF, EF. Je dis que les triangles



ABC, DEF sont identiques et que leurs plans seront parallèles.

Car, 1°. puisque BE est égale et parallèle à AD, la figure ABED est un parallélogramme (Tom II, §. 546); donc AB est égale et parallèle à DE.

De même, puisque CF est égale et parallèle à AD, la figure ADFC est un parallélogramme; donc AC est égale et parallèle à DF.

Par la même raison, puisque BE est égale et parallèle à CF, la figure BEFC est un parallélogramme; donc BC est égale et parallèle à EF.

Donc les triangles ABC, DEF ont les côtés égaux chacun à chacun; donc ils sont identiques.

2°. Puisque les côtés des deux triangles sont parallèles chacun à chacun, les plans de ces triangles sont parallèles.

Ce qu'il fallait démontrer.

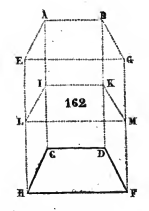
Lorsque les angles plans de deux angles trièdres sont égaux chacun à chacun, comment sont inclinés les plans dans lesquels sont les angles égaux?

244. *Lorsque les angles plans de deux angles trièdres sont égaux chacun à chacun, les plans dans lesquels sont les angles égaux sont également inclinés entr'eux.*

245. On appelle en géométrie *volume* l'espace renfermé entre les surfaces des polyhèdres, des cylindres, des cônes, entre la surface de la sphère, et entre les surfaces des fractions de ces corps. Qu'appelle-t-on volume en géométrie?

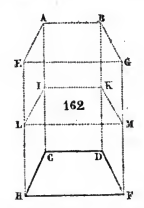
Plusieurs géomètres remplacent le mot *volume* par celui de *solidité*.

246. *Toute section d'un prisme faite par un plan parallèle à sa base est identique avec la base.* Avec quoi est identique toute section d'un prisme faite par un plan parallèle à la base?



Soit (fig. 162) le prisme quadrangulaire BH dont la base est CDFH d'un côté et ABGE de l'autre. Coupons ce prisme par le plan IKML parallèlement à la base. Je dis que le plan IKML est identique avec la base CDFH ou ABGE.

Car les deux plans CDHF, IKML sont, par hypothèse, parallèles; or deux plans parallèles étant coupés par un troisième plan EGFH, les deux sections sont parallèles (§. 234). Donc la droite LM est parallèle à la droite HF. Mais HL et FM sont parallèles puisque EGFH est un des



quatre plans parallélogrammiques qui joignent les deux bases; donc la figure LHFM est un parallélogramme; donc les côtés opposés LM, HF sont égaux.

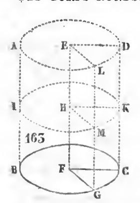
On prouverait de la même manière que les sections IL, CH des plans IKML, CDFH, faites par le plan EACH sont égales; que les sections IK, CD des plans IKML, CDFH par le plan ABDC sont aussi égales; il en est de même des sections KM, DF des plans IKDC, CDFH par le plan KMFD.

Donc les deux quadrilatères IKML, CDFH ont les côtés égaux chacun à chacun et de plus les angles égaux, puisque ces angles sont compris entre côtés parallèles; donc ces deux quadrilatères sont identiques.

Ce qu'il fallait démontrer.

Avec quoi est identique toute section faite à un cylindre par un plan parallèle à la base?

247. *Toute section faite à un cylindre par un plan parallèle à la base est identique avec cette base.*

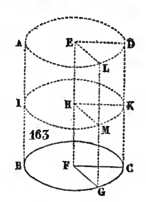


Soit (fig. 163) le cylindre BD dont les bases sont BGC, ALD, et dont EFCD est le rectangle générateur (§. 209). Soit IMK une section faite parallèlement à la base BGC ou ALD; je dis que la section IMK est un cercle de même rayon que la base.

En effet, faisons passer par l'axe EF du cylindre le plan EFGL qui rencontrera le plan IMK aux points H, M, et joignons les points HM, HK.

Puisque FH, CK sont parallèles, comme appartenant aux côtés opposés d'un rectangle, et que le plan FK rencontrant les deux plans parallèles BGC, IMK, les deux sections FC, HK sont parallèles (§. 234), la figure HFCK est un parallélogramme. Donc les côtés opposés FC, HK sont égaux. Or, FC est un rayon de la base BGC.

De même, dans le quadrilatère EFGL, les droites EL, HM, FG sont parallèles comme étant les sections de trois plans parallèles faites par un troisième plan EFGL; mais EL, FG



sont des rayons de deux cercles identiques; donc ils sont égaux; donc le quadrilatère EFGL a deux côtés opposés égaux et parallèles; donc (Tom. II, §. 546) ce quadrilatère est un parallélogramme; donc on a EF=LG. Donc HM, qui est parallèle à FG, est égale à FG. Donc la figure IMK est un cercle qui a le même rayon que la base BGC ou ALD.

Toute autre section faite par un plan conduit suivant l'axe EF tendrait à prouver la même chose; d'où il suit que toute section faite à un cylindre par un plan parallèle à la base est identique avec cette base.

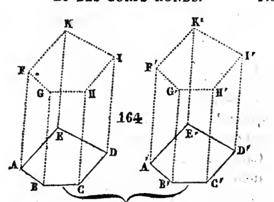
Ce qu'il fallait démontrer.

Que sont deux polyèdres qui ont les mêmes sommets et en même nombre?

248. Axiôme. *Deux polyhèdres qui ont les mêmes sommets et en même nombre sont identiques.*

Que sont deux prismes lorsqu'ils ont un angle trièdre compris entre plans identiques chacun à chacun et disposés de la même manière?

249. *Deux prismes sont identiques lorsqu'ils ont un angle trièdre compris entre plans identiques chacun à chacun et disposés de la même manière.*



Soit (fig. 164) la base ABCDE identique avec la base A'B'C'D'E'. Le parallélogramme ABGF sera alors identique avec le parallélogramme A'B'G'F', et le parallélogramme BCHG identique avec le parallélogramme B'C'H'G'. Les prismes auxquels appartiennent ces bases auront ainsi un angle trièdre compris entre plans identiques chacun à chacun : je dis que ces prismes sont identiques.

Car ces deux bases étant posées l'une sur l'autre, coïncideront dans toute leur étendue ; or les trois angles plans qui forment l'angle trièdre B sont égaux aux trois angles plans qui forment l'angle trièdre B', savoir : ABC=A'B'C', ABG=A'B'G', et GBC=G'B'C'; et ces angles sont disposés de la même manière. Donc les angles trièdres B et B' sont égaux, et par conséquent le côté BG tombera sur son égal B'G'.

De même, à cause des parallélogrammes identiques ABGF, A'B'G'F', le côté GF tombera sur son égal G'F', et GH sur G'H', et ainsi de suite. Donc la base supérieure FGHIK coïncidera entièrement avec son identique F'G'H'I'K',

et les deux prismes n'en feront qu'un seul, puisqu'ils auront les mêmes sommets (§. 248).

Ce qu'il fallait démontrer.

Que fait un plan qui passe par deux arêtes opposées d'un parallélépipède rectangle?

250. *Le plan qui passe par deux arêtes opposées d'un parallélépipède rectangle partage ce corps en deux prismes droits et identiques qui auront pour base un triangle rectangle.*

Car les deux bases de l'un des deux prismes triangulaires se trouveront être identiques avec les deux bases de l'autre prisme, et par conséquent elles coïncideront parfaitement dès qu'elles seront superposées. Mais alors leurs arêtes coïncideront aussi, puisqu'elles sont perpendiculaires à ces bases.

Ce qu'il fallait démontrer.

Cette propriété n'est pas applicable à un parallélépipède obliquangle. Les deux prismes qui en résultent ne sont alors que symétriques et ne donnent pas lieu à la coïncidence.

Lorsque deux prismes ont leurs bases égales en surface quoique non identiques, quel est le volume de l'un par rapport à celui de l'autre, si d'ailleurs ils ont même hauteur?

251. *Deux prismes dont les bases, quoique non identiques, sont égales en surface, sont égaux en volume, si d'ailleurs ils ont même hauteur* (1).

(1) On est convenu de donner à l'unité de mesure des volumes des différens corps celle du cube, parce que ce corps est celui qui se compare avec le plus de facilité à ceux que l'on a ordinairement besoin de mesurer. Que l'on prenne une épaisseur quelconque à bases parallèles, en supposant la distance de ces parallèles aussi petite que peut le concevoir la pensée; il est certain que l'on peut aussi prendre par la pensée une longueur sur ces parallèles aussi petite que la distance qui existe entre

Car si l'on se représente ces polyhèdres coupés par des plans parallèles à leurs bases en tranches aussi minces que l'on voudra, et d'une épaisseur égale à celle des points représentés par des cubes, il est clair que dans chaque polyhèdre chaque section étant égale à la base, le nombre de *points-cubes* dont chaque tranche sera composée sera partout le même et égal au nombre des points superficiels de la base. Or, nous supposons même hauteur aux deux prismes; donc ils auront chacun le même nombre de tranches; donc ils contiendront le même nombre de points-cubes; donc ils sont égaux en volume.

252. *Les triangles qui, dans deux polyhèdres, joignent le sommet d'un angle et les extrémités d'une arête homologue, sont deux figures semblables et disposées de la même manière dans les deux polyhèdres.*

Que sont les triangles qui, dans deux polyhèdres, joignent le sommet d'un angle et les extrémités d'une arête homologue?

Car les extrémités des arêtes homologues sont elles-mêmes les sommets d'angles polyhèdres homologues disposés de la même manière à l'égard des corps auxquels ils appartiennent.

253. COROLLAIRE I[er]. *Les diagonales qui joignent deux angles polyhèdres homologues sont entr'elles comme les arêtes homologues de ces corps.*

Que sont les diagonales qui joignent deux angles polyhèdres homologues dans deux polyhèdres?

ces parallèles; il en résultera un corps appelé cube, composé de six carrés identiques, que l'on pourra considérer comme des points, puisque le côté de chaque carré sera aussi court que l'on voudra.

Comment peuvent être partagés deux polyèdres semblables?

254. COROLLAIRE IIe. *Deux polyhèdres semblables peuvent être partagés en un même nombre de pyramides semblables chacune à chacune par des plans conduits suivant des angles homologues et suivant deux arêtes homologues.*

Si dans deux polyhèdres on abaisse de deux angles homologues des perpendiculaires sur deux faces homologues, quel rapport auront entr'elles ces perpendiculaires?

255. *Si dans deux polyhèdres on abaisse de deux angles homologues des perpendiculaires sur deux faces homologues, ces perpendiculaires auront entr'elles le même rapport que deux arêtes homologues quelconques.*

En effet, les deux angles homologues étant disposés de la même manière à l'égard de deux faces homologues, ne peuvent se trouver qu'à des distances de ces faces qui soient entr'elles dans le rapport des dimensions homologues des deux polyhèdres.

A quoi est égale la surface convexe d'un prisme droit?

256. *La surface convexe d'un prisme droit est égale au produit du périmètre de la base par la hauteur du prisme.*

Car la hauteur du prisme n'est autre chose que la hauteur de chacun des rectangles qui composent la surface convexe du prisme; donc pour avoir la surface convexe du prisme, il n'y a qu'à multiplier la base de chacun de ces rectangles par la hauteur du prisme; or les bases réunies de ces rectangles forment le périmètre de la base du prisme.

Ce qu'il fallait démontrer.

A quoi est égale la surface convexe d'un prisme quelconque?

257. COROLLAIRE. *La surface convexe d'un prisme quelconque est égale au produit de l'une des arêtes de ce prisme par le périmètre d'une*

section faite par un plan perpendiculaire à cette arête.

258. *La surface convexe d'un cylindre droit est égale au produit de la hauteur de ce cylindre par la circonférence de sa base.* A quoi est égale la surface convexe d'un cylindre droit?

Car la base étant un cercle peut être considérée comme un polygone régulier d'une infinité de côtés (§. 47). Donc un cylindre droit peut être considéré comme un prisme droit; et alors cette proposition rentre dans le cas de la 256e.

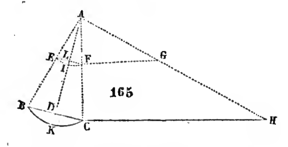
259. *La surface convexe d'une pyramide régulière est égale au produit du périmètre de sa base par la moitié de l'apothême.* A quoi est égale la surface convexe d'une pyramide régulière?

Car tous les triangles étant de même hauteur, il s'agit de multiplier la somme de toutes les bases de ces triangles par la moitié de la hauteur commune.

260. *La surface convexe d'un cône droit est égale au produit de la circonférence de sa base par la moitié de son côté* (§. 214). A quoi est égale la surface convexe d'un cône droit?

En effet, la circonférence d'un cercle peut être considérée comme un cône régulier d'une infinité de côtés (§. 47); le cône n'est donc autre chose qu'une pyramide régulière dont la surface convexe est composée d'une infinité de triangles identiques qui ont pour base un des côtés égaux de la base du cône.

261. *Lorsqu'un cône droit a été coupé par un plan parallèle à sa base, la surface convexe du tronc de cône est égale au produit du côté du tronc multiplié par la demi-somme des circonférences de ses deux bases.* Lorsqu'un cône droit a été coupé par un plan parallèle à sa base, à quoi est égale la surface convexe du tronc de cône?



Soit (fig. 165) ADC le triangle rectangle qui sert à former le cône droit ABC en tournant autour du côté immobile AD. Soit faite au cône droit une section EIF parallèlement à la base BKC. Je dis que la surface convexe du tronc de cône EBKCF est égale au produit du côté CF par la moitié de la somme des circonférences des deux bases BKC, EIF.

Élevons sur la droite AC au point C une perpendiculaire CH dont la longueur soit égale à celle de la circonférence BKC, ce qui se fait en prenant trois fois le diamètre BC et en ajoutant un septième de ce diamètre; joignons ensuite AH. Tirons enfin FG parallèlement à CH.

La surface d'un triangle étant égale au produit de sa base par la moitié de sa hauteur, nous avons :

surf. du triangle $ACH = CH \times {}^1/_2 AC$ (α).
surf. du triangle $AFG = FG \times {}^1/_2 AF$ (β).

Les triangles ADC, ALF étant semblables, puisque les angles en L et en D sont droits outre que les côtés DC, LF sont parallèles, et que

l'angle A est commun, il en résulte cette proportion :

AC : AF : : DC : LF (γ).

Les triangles ACH, AFG étant semblables, puisque les angles en C et F sont droits et que l'angle A est commun, il en résulte aussi cette proportion :

AC : AF : : CH : FG (δ).

Dans les deux proportions (γ) et (δ) le rapport AC : AF étant commun, on obtient cette nouvelle proportion :

DC : LF : : CH : FG (ε).

On a aussi (§. 48) :

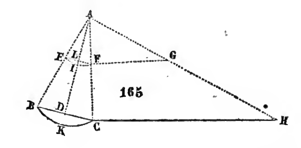
rayon DC : rayon LF : : circ. BKC : circ. EIF (ζ).

Supprimant le rapport commun DC : LF dans les deux proportions (ε) et (ζ) on formera cette nouvelle proportion :

Circ. BKC : circ. EIF : : CH : FG (η).

Mais on a par construction CH = circ. BKC; donc FG = circ. EIF puisque les deux antécédens d'une proportion ne peuvent être égaux sans que les conséquens le soient aussi.

Mais la surface convexe du cône, ABKC étant égale au produit de la base BKC par la moitié de son côté AC d'après le §. 260, et celle du triangle ACH étant égale au produit de la base CH par la moitié de ce même côté AC qui est la hauteur du triangle, il s'ensuit que ces deux surfaces sont composées de deux facteurs identiques,



puisque CH est par construction égal à BKC. Donc ces surfaces sont égales.

Il suit encore du §. 260 que la surface convexe du cône droit AEIF est égale au produit de la circonférence de la base EIF par la moitié du côté AF; et comme la surface du triangle AFG est égale au produit de sa base FG par la moitié de sa hauteur AF, et que nous venons de trouver cette base FG égale à la circonférence EIF, il s'ensuit que ces deux surfaces ont des facteurs identiques, et que par conséquent elles sont égales. Donc en retranchant le cône partiel AEIF du cône total ABKC, et le triangle partiel AEFG du triangle total ACH, il restera le tronc de cône EBCF; donc la surface convexe sera égale au trapèze CFGH. Mais ce trapèze a pour mesure $1/2(CH + FG) \times CF$ (Tom. II, §. 558); donc la surface convexe d'un tronc de cône à bases parallèles est égale au produit de la demi-somme des circonférences des deux bases par le côté des troncs.

Ce qu'il fallait démontrer.

262. Corollaire. *La surface convexe d'un tronc de cône à bases parallèles est égale au produit de son côté par la circonférence d'une section faite à égale distance des deux bases.* A quoi est égal le produit du côté d'un tronc de cône à bases parallèles par la circonférence d'une section faite à égale distance des deux bases?

263. Axiome. *Lorsque deux parallélépipèdes ont une base commune, et que leurs bases supérieures sont comprises dans un même plan entre les mêmes parallèles, ces deux parallélépipèdes sont égaux en volume.* Lorsque deux parallélépipèdes ont une base commune, et que leurs bases supérieures sont comprises entre les mêmes parallèles, quelle est la différence des volumes de ces deux parallélépipèdes?

264. Axiome. *Deux parallélépipèdes de même base et de même hauteur sont égaux en volume.* Quelle est la différence des volumes de deux parallélépipèdes qui ont même base et même hauteur?

265. Axiome. *Tout parallélépipède peut être changé en un parallélépipède rectangle égal en volume qui ait même hauteur et dont la base soit égale en surface.* En quel corps tout parallélépipède peut-il être changé?

265 bis. *Toute section faite à une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone semblable à cette base.* Quelle espèce de figure obtient-on en coupant une pyramide par un plan parallèle à la base?

En effet, la section faite à chaque triangle de la surface convexe de la pyramide étant parallèle à la base du triangle, il s'ensuit que tous les angles de la section sont formés de côtés parallèles à ceux qui forment les angles de la base.

Ce qu'il fallait démontrer.

266. *Deux parallélépipèdes rectangles qui ont la même base sont entr'eux comme leurs hauteurs.* Comment sont entr'eux deux parallélépipèdes rectangles qui ont la même base?

Car supposons que les hauteurs soient entre elles, par exemple, comme 12 est à 17; si la plus grande hauteur est partagée en 17 parties égales,

la plus petite hauteur contiendra 12 de ces parties; et si par chaque point de division nous faisons passer des plans parallèles à la base, ces plans seront identiques avec cette base (§. 246). Le plus grand prisme contiendra donc 17 prismes partiels qui auront même hauteur et des bases identiques. Donc ces 17 prismes seront identiques. Donc le plus petit des deux prismes proposés contiendra 12 prismes identiques avec les 17 contenus dans le plus grand. Donc le plus grand parallélépipède contiendra autant de fois le plus petit que la hauteur du plus grand contient celle du petit; c'est-à-dire que deux parallélépipèdes rectangles qui ont même base sont entr'eux comme leurs hauteurs.

Ce qu'il fallait démontrer.

Comment sont entr'eux deux parallélépipèdes rectangles qui ont même hauteur ?

267. Corollaire Ier. *Deux parallélépipèdes rectangles qui ont même hauteur sont entr'eux comme leurs bases.*

A quoi est égal le volume d'un parallélépipède ?

268. Corollaire II. *Le volume d'un parallélépipède est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

A quoi est égal le volume d'un prisme triangulaire ?

269. Corollaire III. *Le volume d'un prisme triangulaire est égal au produit de sa base multipliée par sa hauteur* (§. 250).

A quoi est égal le volume d'un prisme quelconque ?

270. Corollaire IV. *Le volume d'un prisme quelconque est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

De quoi est composé un tronc de pyramide à bases triangulaires parallèles ?

271 *Un tronc de pyramide à bases triangulaires parallèles est composé de trois pyramides de même hauteur que le tronc, dont la première a pour base la base inférieure du tronc, la*

seconde a pour base la base supérieure, et la troisième a pour base une moyenne proportionnelle entre les deux bases du tronc.

1°. Si d'un des trois sommets de la base supérieure on conduit deux diagonales qui aillent aboutir à la base inférieure, et que l'on fasse passer un plan par ces deux diagonales, il est clair qu'une pyramide se trouvera ainsi détachée du tronc, et que cette pyramide aura pour base la base inférieure du tronc.

2°. Il restera alors du tronc de cône une pyramide quadrangulaire que l'on pourra couper par un plan qui passera par la diagonale de la base de la pyramide quadrangulaire et par la section contiguë précédente; on obtiendra ainsi une nouvelle pyramide triangulaire qui aura pour base la base supérieure du tronc, et dont le sommet sera à la base inférieure du tronc, en sorte que le sommet de cette nouvelle pyramide se trouvant dans un plan parallèle à celui où se trouve la première pyramide, les deux pyramides auront la même hauteur.

3°. La troisième pyramide épuisera le tronc, et aura même hauteur que les deux pyramides précédentes. Pour en avoir la base on prendra une moyenne proportionnelle entre les bases des deux autres.

Ce qu'il fallait démontrer.

272. *Le volume d'une pyramide quelconque est égal au produit de sa base par le tiers de sa hauteur.* A quoi est égal le volume d'une pyramide quelconque?

En effet, le volume d'un prisme triangulaire est égal au produit de sa base par sa hauteur (§. 269), et une pyramide triangulaire est le tiers d'un prisme triangulaire de même base et de même hauteur.

Comment sont entr'elles deux pyramides semblables?

273. *Deux pyramides semblables sont entre elles comme les cubes des côtés homologues.*

Car deux pyramides étant semblables, l'angle polyhèdre du sommet sera commun, et alors les bases seront parallèles.

Comment sont entre eux deux polyhèdres semblables?

274. COROLLAIRE. *Deux polyhèdres semblables sont entr'eux comme les cubes des côtés homologues.*

A quoi est égal le volume d'un cylindre?

275. *Le volume d'un cylindre est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

En effet, si aux deux bases d'un cylindre on substituait des polygones d'une surface égale, on obtiendrait un prisme qui aurait le même volume que le cylindre; or le volume d'un prisme est égal au produit de sa base par sa hauteur (§. 270).

A quoi est égal le volume d'un cône?

276. *Le volume d'un cône est égal au produit de sa base par le tiers de sa hauteur.*

Car un cône peut être considéré comme une pyramide dont la base est un polygone régulier d'une infinité de côtés; or le volume d'une pyramide est égal au produit de sa base par le tiers de sa hauteur (§. 272).

Qu'est le volume d'un cône comparativement au volume d'un cylindre de même base et de même hauteur?

277. COROLLAIRE Ier. *Donc un cône est le tiers d'un cylindre de même base et de même hauteur.*

278. Corollaire II. *Donc deux cônes de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases.* Comment sont entr'eux deux cônes de même hauteur ?

279. Corollaire III. *Donc deux cônes de même base sont entr'eux comme leurs hauteurs.* Comment sont entr'eux deux cônes de même base ?

280. Corollaire IV. *Donc deux cônes semblables sont entr'eux comme les cubes des diamètres de leurs bases, ou comme les cubes de leurs hauteurs.* Comment sont entr'eux deux cônes semblables ?

281 Corollaire V. *Donc deux pyramides de même hauteur sont entr'elles comme leurs bases.* Comment sont entr'elles deux pyramides de même hauteur ?

282. Corollaire VI. *Donc deux pyramides de même base sont entr'elles comme leurs hauteurs.* Comment sont entr'elles deux pyramides de même base ?

DES POLYHÈDRES RÉGULIERS.

284. Il y a cinq polyhèdres que l'on appelle *réguliers*; ce sont le tettrahèdre, l'hexahèdre, l'octahèdre, le duodécahèdre et l'icosahèdre (1). Le premier a quatre faces, le second en a six, le troisième en a huit, le quatrième en a douze et le cinquième en a vingt. Combien y a-t-il de polyhèdres réguliers, et quels sont-ils ?

Les faces du tettrahèdre sont quatre triangles équilatéraux et identiques. Combien le tettrahèdre régulier a-t-il de faces et quelles sont-elles ?

Celles de l'hexahèdre sont six carrés identiques. Combien l'hexahèdre régulier a-t-il de faces et quelles sont leurs figures ?

Celles de l'octahèdre sont huit triangles équilatéraux identiques. De quoi se compose l'octahèdre régulier ?

(1) Ce terme vient du mot grec *eicosi*, qui signifie *vingt*. Quelle est l'étymologie du terme *icosahèdre* ?

De quoi se compose le duodécahèdre régulier?

Le duodécahèdre est composé de douze pentagones réguliers et identiques.

Qu'est-ce que l'icosahèdre?

Les faces de l'icosahèdre sont vingt triangles équilatéraux et identiques.

DE LA SPHÈRE.

Quelle figure résulte de toute section de la sphère faite par un plan?

285. *Toute section de la sphère faite par un plan est un cercle.*

En effet si à des points quelconques de la surface de la sphère où le plan la rencontre on conduit des rayons de cette sphère, tous ces rayons seront des droites égales; donc ces droites se trouveront également éloignées du pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur ce plan; donc le pied de cette perpendiculaire se trouvera être le centre d'un cercle sur la circonférence duquel seront les extrémités des rayons susdits.

Ce qu'il fallait démontrer.

Sur quelle droite se trouvent le centre d'un petit cercle et celui de la sphère?

286. Corollaire. *Le centre d'un petit cercle et celui de la sphère sont sur une même droite perpendiculaire au plan du petit cercle.*

A quoi est égale la surface de la sphère?

287. *La surface de la sphère est égale au produit de la circonférence d'un de ses grands cercles multipliée par le diamètre.*

Cette proposition ainsi que la suivante sera démontrée rigoureusement dans mon *Traité particulier de Géométrie.*

A quoi est égal le volume de la sphère?

Le volume de la sphère est égal à sa surface multipliée par le tiers de son rayon.

La surface d'un cercle étant égale au produit

de la circonférence multipliée par la moitié du rayon ou le quart du diamètre, il s'ensuit aussi que

288. *La surface de la sphère est quadruple de celle d'un grand cercle.*

De quel corps le quadruple d'un grand cercle de la sphère représente-t-il la surface?

289. Les volumes de deux corps semblables étant entr'eux comme les cubes des lignes homologues de ces corps, il s'ensuit que

290 *Les volumes des sphères sont entr'eux comme les cubes de leurs rayons ou de leurs diamètres.*

Comment sont entr'eux les volumes des sphères?

En effet récapitulons les trois dimensions des figures semblables.

1°. Les périmètres des figures planes semblables sont entr'eux comme les côtés homologues.

2°. Les surfaces des figures planes semblables sont entr'elles comme les carrés des côtés homologues.

3°. Les volumes des corps semblables sont entr'eux comme les cubes des côtés homologues.

Ainsi, si deux sphères avaient leurs diamètres dans le rapport de 2 à 5, les circonférences de leurs grands cercles seraient aussi dans le rapport de 2 à 5; les surfaces de ces sphères seraient comme 4 est à 25, et les volumes comme 8 est à 125; c'est-à-dire :

Si l'on veut donc faire un corps semblable à un autre, et dont le volume soit à celui de ce dernier comme 3 est à 4, il faut lui donner des dimensions telles que le cube de l'une quelconque de ces dimensions soit au cube d'une

Comment fait-on un corps semblable à un corps proposé et dont le volume soit à celui du corps proposé comme 3 est à 4?

dimension homologue du corps auquel il doit être semblable comme 3 *est à* 4.

Si l'on a un globe de 8 pouces de diamètre, et qu'on demande quel doit être le diamètre d'un globe qui serait les 45/4 du globe de 8 pouces de diamètre, comment obtient-on la réponse ?

Si, par exemple, l'on a un globe de 8 pouces de diamètre et qu'on demande quel doit être le diamètre d'un globe qui serait les 45/4 du globe de 8 pouces de diamètre, il faudrait chercher le quatrième terme de cette proportion :

$$4 : 45 :: 8^3 : x.$$

ou

$$4 : 45 :: 512 : x = 5760.$$

Extrayant la racine cubique de 5760, on trouverait 17 pouces 9/10 pour le diamètre cherché du globe à moins d'1/10 de pouce près en moins ; c'est-à-dire que le diamètre cherché serait d'environ 18 pouces. Le célèbre M. Delamarche en construit de cette dimension (1).

On voit avec quelle progression rapide l'augmentation du diamètre d'un globe en fait accroître le volume. Dans l'exemple présent le diamètre cherché n'est guère que le double du diamètre du petit globe, tandis que le volume du grand globe est plus de onze fois aussi grand que celui du petit.

Lorsque l'on connaît le poids d'un boulet et son diamètre, que fait-on pour trouver le poids d'un autre boulet dont on connaît aussi le diamètre et qui est de la même matière ?

291. Dans les corps composés de la même matière, les poids sont proportionnels au volume. Lors donc que l'on connaît le poids d'un boulet, et son diamètre, si l'on veut trouver celui d'un boulet d'un autre diamètre et de la même matière, on fera cette proportion.

(1) Il demeure rue du Jardinet, n°. 13, à Paris.

Le cube du diamètre du premier boulet dont le poids est connu
Est au cube du diamètre du second boulet,
Comme le poids du premier boulet
Est au poids du second boulet.

DES SECTIONS CONIQUES.

292. Les sections coniques sont des figures qui résultent de sections faites à un cône par un plan.

Qu'entend-on par sections coniques?

293. Les sections d'un cône par un plan donnent naissance à cinq figures différentes, savoir : le *triangle*, le *cercle*, *l'ellipse*, *l'hyperbole* et la *parabole*.

A quelles figures donnent naissance les sections d'un cône par un plan?

294. Lorsque le plan passe par le sommet du cône et la base, la section est un *triangle*.

A quelle figure donne lieu la section d'un cône par un plan qui passe par le sommet et la base?

295. Si la section faite par le plan est parallèle à la base du cône, la figure qui en résulte est un *cercle*.

Quelle figure obtient-on lorsqu'on coupe un cône par un plan parallèle à la base?

296. *L'ellipse* est la figure qui provient de la section d'un cône faite par un plan obliquement à la base.

Quelle figure résulte de la section d'un cône faite par un plan obliquement à la base?

297. On appelle *parabole* la section faite à un cône par un plan parallèle à un des côtés du cône.

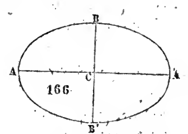
Comment appelle-t-on la figure produite par la section faite à un cône par un plan parallèle au côté du cône?

298. *L'hyperbole* est une section faite à un cône par un plan qui fait avec la base un angle plus grand que celui du côté du cône avec la base.

Qu'est-ce que l'hyperbole?

Définition de l'ellipse.

299. L'ellipse est une ligne courbe qui a deux axes ou diamètres dont l'un est plus grand que l'autre. (Voyez fig. 166.)



La droite A A′ s'appelle le grand axe de l'ellipse.

Le point C, milieu du grand axe, se nomme le centre de l'ellipse.

La droite B B′ perpendiculaire au grand axe, porte le nom de *petit axe*.

Qu'entend-on par les sommets de l'ellipse?

Les extrémités A A′ du grand axe s'appellent sommets de l'ellipse.

Nota. M. Allizeau, naturaliste, quai Malaquais, N°. 15, fabrique des figures en relief, soit en bois, soit en corne, pour la démonstration des polyhèdres, et en général pour l'architecture, la physique, etc., etc.

TRIGONOMÉTRIE
RECTILIGNE.

300 Le terme de *trigonométrie* vient de trois mots grecs qui signifient *mesure des triangles*.

Etymologie du mot trigonométrie.

L'objet de la trigonométrie est de déterminer l'étendue des angles et des côtés d'un triangle au moyen de la connaissance de quelques-uns des six élémens qui entrent dans un triangle.

Quel est l'objet de la trigonométrie ?

301. Pour résoudre un triangle rectiligne, il suffit de connaître un de ses côtés et deux de ses angles.

Quels sont ceux des six élémens d'un triangle rectiligne qu'il suffit de connaître pour résoudre ce triangle?

302. En ne connaissant que les trois angles d'un triangle rectiligne, il est impossible d'en déterminer les côtés, car on peut faire une infinité de triangles semblables à un triangle donné dont les côtés soient tous différens.

Peut-on déterminer les trois côtés d'un triangle rectiligne lorsque l'on n'en connaît que les trois angles?

En effet, entre deux des côtés d'un triangle on peut mener autant de parallèles que l'on veut à la base, ce qui donne lieu à un nombre illimité de triangles semblables dont les côtés sont tous de grandeurs différentes.

303. Il n'en est pas de même dans un triangle sphérique; car il suffit pour déterminer celui-ci que l'on connaisse ses trois angles.

Suffit-il de connaître les trois angles d'un triangle sphérique pour le déterminer ?

304. Dans l'ancienne division, le *complément* d'un angle ou d'un arc est ce qui reste en retranchant cet angle ou cet arc de 90°.

Qu'est-ce que le complément d'un angle ou d'un arc dans l'ancienne division ?

Ainsi un angle de 62° 16' a pour complément 27° 44'.

Quel est le complément d'un angle de 62° 16' ?

Si un angle ou un arc a plus de 90°, de quel signe sera affecté son complément?

305. Donc si un angle ou un arc a plus de 90° son complément sera affecté du signe soustractif.

Quel est le complément de chacun des deux angles aigus d'un triangle rectangle?

306. Il suit de là qu'un des deux angles aigus d'un triangle rectangle est le complément de l'autre.

Qu'est-ce que le supplément d'un angle ou d'un arc, dans l'ancienne division?

307. Le supplément d'un angle ou d'un arc, dans l'ancienne division, est ce qui reste en retranchant cet angle ou cet arc de 180°, valeur de deux angles droits.

Dans tout triangle, de quoi un angle quelconque est-il le supplément?

308. Donc dans tout triangle un angle est le supplément de la somme des deux autres.

Qu'est-ce que le sinus d'un arc?

309. Le sinus d'un arc est la perpendiculaire abaissée d'une des extrémités de cet arc sur le rayon qui aboutit à l'autre extrémité (Voy. fig. 167.)

Ainsi la droite ID, perpendiculaire sur le rayon AB, est le sinus de l'arc AI.

Qu'est-ce que la tête du sinus?

310. La tête du sinus est le point qui lui est commun avec l'extrémité de l'arc de laquelle on a abaissé ce sinus.

Qu'est-ce que le pied du sinus?

311. Le *pied* du sinus est le point de contact avec le rayon avec lequel il fait un angle droit.

Qu'entend-on par sinus verse?

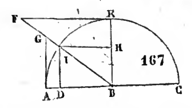
312. Le sinus *verse* est la partie du rayon comprise entre le pied du sinus et l'extrémité du rayon.

AD est le sinus verse de l'arc AI.

Qu'appelle-t-on tangente d'un arc?

313. La *tangente* d'un arc est la perpendiculaire à l'extrémité du rayon sur lequel tombe le pied du sinus; et cette tangente est comprise entre ce rayon et la sécante de cet arc.

A G est la tangente de l'arc AI.



314. La *sécante* d'un arc est le rayon prolongé qui passe par la tête du sinus de cet arc et qui s'arrête à la rencontre de la tangente de l'arc.

Qu'est-ce que la sécante d'un arc?

BG est la sécante de l'arc AI.

La tangente d'un arc, la sécante et le rayon sur lequel tombe le pied du sinus, forment toujours un triangle rectangle dont la sécante est l'hypoténuse.

Que forment la tangente d'un arc, la sécante et le rayon?

315. Le *cosinus* d'un arc est le sinus du complément de cet arc.

Qu'entend-on par le cosinus d'un arc?

IH est le cosinus de l'arc AI, en supposant l'angle ABE droit.

La tête du cosinus et celle du sinus sont un seul et même point.

La tête du sinus et celle du cosinus sont-elles situées à deux points différens?

Le cosinus est toujours perpendiculaire au sinus.

Quel angle le cosinus fait-il toujours avec le sinus?

316. La *cotangente* d'un arc est la tangente du complément de cet arc.

Qu'est-ce que la cotangente d'un arc?

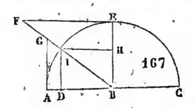
EF est la cotangente de l'arc AI.

La cotangente est toujours perpendiculaire à la tangente.

Quel angle la cotangente fait-elle toujours avec la tangente?

317. La *cosécante* d'un arc est la sécante du complément de cet arc.

Définition de la cosécante d'un arc.



BF est la cosécante de l'arc AI (1).

Dans quelle direction se trouvent la sécante et la cosécante d'un arc?

318. La sécante et la cosécante se trouvent toujours sur une même ligne droite; la plus longue est celle qui appartient à un plus grand angle.

Quel angle font entr'eux la tangente et le sinus d'un arc?

319. La tangente et le sinus sont toujours parallèles.

Quel angle font entr'eux le sinus verse et le cosinus?

320. Le sinus verse est toujours parallèle au cosinus.

A quoi est toujours égal le cosinus d'un arc?

321. Le cosinus d'un arc est toujours égal à la partie du rayon interceptée entre le centre et le pied du sinus.

A quoi le sinus d'un arc est-il toujours égal?

322. Le sinus d'un arc est toujours égal au sinus du supplément de cet arc.

A quoi le cosinus d'un arc plus grand que 90°, est-il toujours égal?

323. Le cosinus d'un arc ou d'un angle plus grand que 90° est toujours égal au cosinus de son supplément pris soustractivement.

Quelle est la grandeur du sinus d'un arc par rapport à la corde qui sous-tend un arc double?

324. Le sinus d'un arc est la moitié de la corde qui sous-tend un arc double.

Ainsi, ID est la moitié de la corde du double de l'arc AI; car le rayon AB est perpendiculaire

(1) Au lieu de sinus, tangente, sécante, cosinus, cotangente, cosécante, on écrit pour abréger, sin, tang, séc, cos, cot, cosée; ainsi *sin A* signifie sinus de l'arc ou de l'angle A, etc., etc., que l'on prononce *sinus de A*, etc., etc.

sur la corde dont ID fait partie ; or, tout rayon perpendiculaire à une corde passe par le milieu de la corde.

325. Le sinus étant perpendiculaire au rayon sur lequel tombe son pied, et la partie du rayon comprise entre le pied du sinus et le centre étant égale au cosinus (§. 321), il s'ensuit que la somme des carrés du sinus et du cosinus d'un arc est égale au carré du rayon.

A quoi est égale la somme des carrés du sinus et du cosinus d'un arc?

Car le rayon est dans ce cas l'hypoténuse d'un triangle rectangle.

$$\text{Ainsi, } \overline{ID}^2 + \overline{IH}^2 = \overline{IB}^2.$$

326. Le sinus d'un arc, sa tangente, sa sécante et le rayon sur lequel tombe le pied du sinus sont quatre lignes qui forment toujours deux triangles semblables dont le plus grand a deux de ses côtés (la sécante et le rayon) coupés proportionnellement par le sinus.

Quelles figures forment le sinus d'un arc, sa tangente, sa sécante et le rayon sur lequel tombe le pied du sinus?

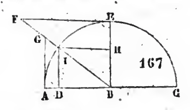
327. Le cosinus d'un arc, sa cotangente, sa cosécante et le rayon sur lequel tombe le pied du cosinus sont quatre lignes qui forment toujours deux triangles semblables dont le plus grand a deux de ses côtés (la cosécante et le rayon) coupés proportionnellement par le cosinus.

Quelles figures forment le cosinus d'un arc, sa cotangente, sa cosécante et le rayon sur lequel tombe le pied du cosinus?

328. Le sinus d'un arc de 90° est égal au rayon.

A quoi est égal le sinus d'un arc de 90°?

En effet, le sinus d'un arc étant la moitié de la corde qui sous-tend un arc double (§. 324), il s'ensuit que le sinus d'un arc de 90° est égal à la moitié de la corde qui sous-tend un arc de 180° ou une demi-circonférence ; or, la corde



qui sous-tend une demi-circonférence est le diamètre même, ou le double du rayon.

A quoi est égal le plus grand sinus qui puisse exister?

329. COROLLAIRE. Donc le plus grand sinus qui puisse exister est égal au rayon.

A quoi est égal le sinus verse?

330. Le sinus verse d'un arc est égal à la différence entre le rayon et le cosinus.

Car AD, sinus verse de l'arc AI, est la différence entre le rayon AB et BD; or BD = IH (§. 321).

Qu'appelle-t-on sinus verse du complément d'un arc?

331. On appelle sinus *verse* du complément d'un arc la partie du rayon interceptée entre le pied du cosinus de cet arc et l'extrémité du rayon.

Ainsi EH est le sinus verse du complément de l'arc AI (fig. 167).

Qu'est ce que le cosinus verse d'un arc?

332. Le cosinus *verse* d'un arc est le sinus verse du complément de cet arc.

A quoi est égal le cosinus verse d'un arc?

333. Le cosinus verse d'un arc est égal à la différence entre le rayon et le sinus.

334. De ce que le sinus d'un arc est la moitié de la corde qui sous-tend un arc double (§. 324),

A quoi le sinus de 30 degrés est-il égal?

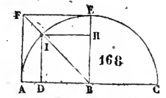
il suit que *le sinus de 30° est égal à la moitié du rayon.*

Car il doit être égal à la moitié de la corde de 60°, qui est le côté de l'hexagone; or nous

avons vu que le côté de l'hexagone est égal au rayon.

335. *La tangente de 45° est égale au rayon.* En effet, la sécante, la tangente et le rayon concourant à former un triangle rectangle, la sécante se trouve alors adjacente à deux angles égaux et de 45° chacun; donc le triangle est isoscèle; donc la tangente est égale au rayon. (V. la fig. 168.)

A quoi est égale la tangente de 45° ?



336. Lorsque la tangente d'un arc est de 45°, il est clair que la cotangente est de 45° aussi. Ces deux lignes se rencontrent alors à leurs extrémités et forment un carré avec les deux rayons qui se rencontrent à angle droit. (V. la fig. 168.)

Lorsque la tangente d'un arc est de 45°, de combien de degrés est la cotangente, et comment se rencontrent ces deux lignes?

337. On voit par là que toutes les fois que la tangente est de 45°, le sinus, la tangente et la sécante sont égaux respectivement au cosinus, à la cotangente et à la cosécante, et que de plus la sécante est commune.

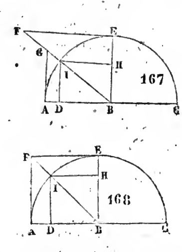
Lorsque la tangente est de 45°, de quelle grandeur sont le sinus, la tangente et la sécante par rapport au cosinus, à la cotangente et à la cosécante?

338. Dans le cas où la tangente d'un arc est de 45°, la tangente et la cotangente forment, avec les deux rayons qui comprennent l'angle droit, un carré dont la diagonale est la sécante ou cosécante, comme on le voit par la figure 168.

Dans le cas où la tangente d'un arc est de 45°, quelle figure forment la tangente et la cotangente avec les deux rayons qui comprennent l'angle droit?

Quand la tangente d'un arc est de 45°, quelle figure forment le sinus et le cosinus avec la partie des deux rayons qui comprennent l'angle droit indépendante du sinus verse et du cosinus verse?

339. Quand la tangente d'un arc est de 45°, le sinus et le cosinus forment avec la partie des deux rayons qui comprennent l'angle droit indépendante du sinus verse et du cosinus verse, un carré dont la diagonale est le rayon. (Voy. fig. 168.)



Connaissant le sinus et le cosinus d'un arc, quelles sont les lignes que l'on peut en déduire?

340. *Connaissant le sinus et le cosinus d'un arc, on peut en déduire la tangente, la sécante, la cotangente et la cosécante.*

En effet, supposons qu'il soit question (fig. 167) de l'arc AI, les triangles ABG, DBI sont semblables, puisque DI est parallèle à la base AG, et le triangle BEF est semblable à ces deux-là, puisque les trois triangles sont rectangles, et que l'angle EBF est égal à chacun des angles AGB, DIB, comme alternes-internes.

Ces triangles donnent donc lieu aux proportions suivantes :

BD : DI : : BA : AF.

Mais on a (§. 321) BD=HI.
D'où résulte cette proportion :

HI : DI : : BA : AF (α).

Ce qui signifie (1)

cos AI : sin AI : : R : tang AI (α').

Vient ensuite la proportion

BD : BI : : BA : BG.

Mais on a (§. 321) BD=HI.
D'où naît cette proportion :

HI : BI : : BA : BG (β).

Ce qui signifie

cos AI : R : : R : séc AI (β').

Vient encore la proportion

DI : BD : : BE : EF.

Mais on a (§. 321) BD=HI.
Il en résulte donc cette proportion :

DI : HI : : BE : EF (γ).

Ce qui signifie

sin AI : cos AI : : R : cot AI (γ').

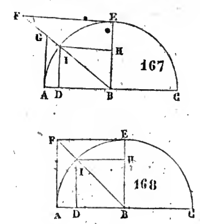
Enfin on obtient cette proportion :

DI : BI : : BE : BF.

Ce qui signifie

sin AI : R : : R : cosèc AI (δ).

(1) La lettre R signifie *rayon*.



Des quatre proportions (α'), (β'), (γ'), (δ') naissent 4 équations, savoir :

1°. La proportion (α') donne

$$\text{tang AI} = \sin \overline{\text{AI} \times \text{R}}/\cos \text{AI}.$$

2°. La proportion (β') fournit

$$\text{séc AI} = \text{R}^2/\cos \text{AI}.$$

3°. De la proportion (γ') résulte

$$\cot \text{AI} = \cos \overline{\text{AI} \times \text{R}}/\sin \text{AI}.$$

4°. Enfin la proportion (δ') donne lieu à l'équation

$$\text{coséc AI} = \text{R}^2/\sin \text{AI}.$$

En quoi peut toujours se transformer le cosinus d'un arc ?

341. Le cosinus d'un arc peut toujours se transformer en sinus de cet arc (1).

(1) Il ne faut pas oublier qu'il est indifférent en trigonométrie de dire un *arc* ou un *angle*.

Appelons A un arc quelconque. Il est clair que son cosinus pourra être exprimé de cette manière :

$$\text{Cos } A = \sin(90° - A).$$

Car le complément de l'arc A est nécessairement 90°—A.

Ainsi cos A ou sin (90° — A) sont deux expressions qui représentent la même quantité.

Quelle différence y a-t-il entre les expressions cos A et sin (90° - A)?

342. Les cosinus soustractifs sont toujours séparés des cosinus additifs par le diamètre.

Par quoi les cosinus soustractifs sont-ils toujours séparés des cosinus additifs ?

Tous les arcs dont l'extrémité tombe à gauche du diamètre ont un cosinus additif.

De quel signe est affecté le cosinus de l'arc dont l'extrémité tombe à gauche du diamètre?

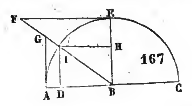
Tous les arcs dont l'extrémité tombe à droite du diamètre ont un cosinus soustractif.

De quel signe est affecté le cosinus de l'arc dont l'extrémité tombe à droite du diamètre?

343. Le nombre de minutes contenues dans un quart de circonférence (ancienne division), est de 60 × 90, c'est-à-dire 5400.

Quel est le nombre de minutes contenues dans un quart de circonférence (ancienne division)?

344. Si nous imaginons le quart de circonférence AIE (fig. 167), divisé en arcs d'une minute ou en 5400 parties égales, et que de chaque point de division nous abaissions des sinus tels que ID sur le rayon AB. Si nous concevons aussi ce rayon AB divisé en un nombre considérable de parties égales, par exemple, en 100000, chaque sinus contiendra un certain nombre de ces parties de rayon ; si donc, par un moyen quelconque, on pouvait déterminer le nombre de ces parties de chacun de ces sinus, il est clair que ces lignes serviraient à fixer la grandeur des arcs. On pourrait écrire par ordre, dans une

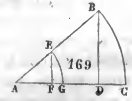


colonne, toutes les minutes depuis zéro jusqu'à 90°, et dans une colonne à côté, et vis-à-vis de chaque minute, le nombre de parties du sinus correspondant.

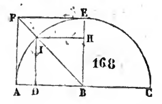
Par le moyen de cette table, on serait en état d'assigner quel est le nombre de degrés d'un arc dont le nombre de parties du sinus serait connu.

Réciproquement, connaissant le nombre de degrés et parties de degrés de l'arc, on pourrait déterminer le nombre de parties de son sinus.

Cette table remplirait ce but, non seulement pour tous les arcs dont le rayon aurait le même nombre de parties qu'on en aurait supposé à celui d'après lequel on l'aurait construite, mais encore pour tout autre arc dont le rayon serait connu.



345. Pour fixer les idées, supposons un angle BAC (fig. 169), dont le côté AB soit le rayon de son arc BC, et ait 10 pieds de longueur ; admet-



tons aussi que le sinus BD soit de 7 pieds. Supposons ensuite que AE soit le rayon d'après lequel on a calculé les tables ; si l'on décrit du rayon AE l'arc EG, et que l'on abaisse le sinus EF, ce sinus sera le sinus des tables, et il sera facile de trouver combien de parties il renferme ; car les triangles ABD, AEF étant semblables, l'on a

$$AB : BD :: AE : EF.$$

Substituant à AB et BD leurs valeurs 10 pieds et 7 pieds, et à AE le nombre 100000, valeur du rayon des tables, il en résulte

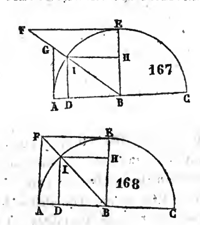
$$10^{\text{pi.}} : 7^{\text{pi.}} :: 100000 : EF = 70000.$$

Le sinus de l'arc EG est donc de 70000.

Je cherche ce nombre dans la table parmi les sinus, et je trouve à côté le nombre de degrés et minutes de l'angle BAC.

346. Si l'on donnait le nombre de degrés et minutes de l'angle BAC et son rayon AB, on trouverait également la valeur du sinus BD ; car sachant quel est le nombre de degrés et minutes de cet angle, on trouverait dans la table quel est le nombre de parties du sinus BD qui répond à

16..



ce nombre de degrés. Les triangles semblables AEF, ABD, fourniraient cette proportion:

$$AE : EF :: AB : BD,$$

par laquelle on calculerait BD aisément, puisque les trois premiers termes AE, EF, AB sont connus, AE, EF l'étant par les tables, et CD étant donné en pieds.

Comment les cosinus de deux arcs sont-ils avec leurs sécantes?

347. *Les cosinus de deux arcs sont en raison inverse de leurs sécantes.* (Voy. fig. 167.)

Car les triangles BEF, BAG étant semblables fournissent la proportion

$$HI : ID :: BF : BG.$$

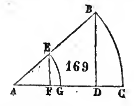
Ce qui signifie

$$\cos AI : \cos IE :: \text{séc } IE : \text{séc } AI.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Que fait-on pour obtenir le cosinus d'un arc dont le sinus est connu?

348. *Pour obtenir le cosinus d'un arc dont le sinus est connu, il faut retrancher le carré du sinus du carré du rayon, et extraire la racine carrée du reste* (§. 325).



349. La solution des triangles rectangles se réduit à 4 cas, savoir : A combien de cas se réduit la solution des triangles rectangles ?

Ou les deux élémens connus sont un des deux angles aigus et un côté de l'angle droit ;

Ou ce sont un angle aigu et l'hypoténuse ;

Ou ce sont un côté de l'angle droit et l'hypoténuse ;

Ou bien les deux côtés de l'angle droit.

Les quatre cas dans lesquels est renfermée la solution des triangles rectangles se trouveront toujours compris dans deux propositions dont voici la première :

350. *Dans tout triangle rectangle le rayon des tables est au sinus d'un des angles aigus comme l'hypoténuse est au côté opposé à cet angle aigu.* Quelle est l'une des deux propositions dans lesquelles sont renfermés les 4 cas de la solution des triangles rectangles ?

En effet, soit (fig. 169) le triangle ABD rectangle en D. D'un rayon quelconque AE décrivons l'arc EG, et supposons que ce rayon soit celui des tables ; le sinus des tables sera alors la perpendiculaire EF abaissée sur le côté AD.

Maintenant les parallèles EF, BD fournissent cette proportion :

AE : EF : : AB : BD ;

Ce qui signifie

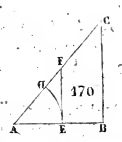
R : sin BAD : : hyp. : côté opposé à BAD.

Ce qu'il fallait démontrer.

351. Voici la seconde proposition dans laquelle se trouvent renfermés les 4 cas de la solution des triangles rectangles.

Quelle est l'une des deux propositions dans lesquelles sont renfermés les 4 cas de la solution des triangles rectangles?

Le rayon des tables est à la tangente d'un des angles aigus comme le côté de l'angle droit adjacent à cet angle est au côté opposé à ce même angle.



Car soit (fig. 170) le triangle ABC rectangle en B, et soit AE le rayon des tables. Soit décrit l'arc DE avec une ouverture de compas égale à AE, et soit menée la tangente EF. Nous aurons alors les deux triangles semblables AEF, ABC, ce qui donnera lieu à la proportion

AE : EF : : AB : BC.

Cette proportion, traduite dans le langage de la proposition actuelle, signifie

R : tang CAB : : AB : BC.

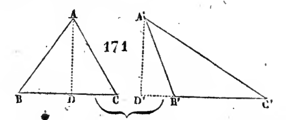
Ce qu'il fallait démontrer.

Dans tout triangle rectiligne, quel est le quatrième terme d'une proportion dont les deux premiers sont le sinus d'un angle et le côté op-

352. *Dans tout triangle rectiligne, le sinus d'un angle est au côté opposé à cet angle comme le sinus d'un des deux autres angles du même triangle est au côté opposé à cet angle.*

posé, et dont le 3e est le sinus d'un des deux autres angles ?

Soit d'abord (fig. 171) un triangle ABC dont tous les angles soient aigus.



Abaissons la perpendiculaire AD sur le côté BC, les triangles rectangles ADB, ADC fourniront, en vertu de la proposition 350, ces deux proportions :

$$R : \sin ABD :: AB : AD \quad (\alpha),$$

$$R : \sin ACD :: AC : AD \quad (\beta).$$

Les proportions (α) et (β) ayant les mêmes extrêmes, il s'ensuit que le produit des extrêmes de la première est égal au produit des moyens de la seconde aussi bien que de la première, et que le produit des extrêmes de la seconde est égal au produit des moyens de la première aussi bien que de la seconde ; d'où l'on tire cette équation :

$$\text{Sin } ABD \times AB = \sin ACD \times AC.$$

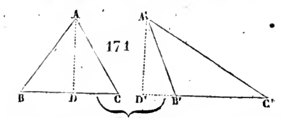
De là naît cette proportion :

$$\text{Sin } ABD : \sin ACD :: AC : AB.$$

Ou, *alternando*,

$$\text{Sin } ABD : AC :: \sin ACD : AB.$$

Ce qu'il fallait démontrer.



Soit ensuite (fig. 171) un triangle A'B'C' dont l'angle A'B'C' soit obtus.

Abaissons la perpendiculaire A'D' sur le côté prolongé B'C' jusqu'en D'.

Nous aurons de même

$$R : \sin A'B'D' :: A'B' : A'D' \ (\gamma),$$

$$R : \sin A'C'D' :: A'C' : A'D' \ (\delta).$$

D'où je conclus

$$\text{Sin } A'C'D' : \sin A'B'D' :: A'B' : A'C' \ (\varepsilon).$$

Ou, *alternando*,

$$\text{Sin } A'C'D' : A'B' :: \sin A'B'D' : A'C' \ (\zeta).$$

Mais l'angle A'B'D' est supplément de A'B'C'; donc sin A'B'D'= sin A'B'C'; donc dans la proportion (ζ) je puis substituer sin A'B'C' à sin A'B'D'; et comme sin A'C'D' est la même chose que sin A'C'B', il en résulte

$$\text{Sin } A'C'B' : A'B' :: \sin A'B'C' : A'C' \ (\eta).$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Les applications et de plus grands développemens trouveront leur place dans mon *Traité spécial de Géométrie.*

TRIGONOMÉTRIE

SPHÉRIQUE.

353. La trigonométrie sphérique a pour objet la mesure des triangles sphériques. Quel est l'objet de la trigonométrie sphérique ?

354. On appelle *triangles sphériques* ceux qui sont formés par trois arcs de grands cercles de la sphère. Définition des triangles sphériques.

355. Un angle sphérique quelconque est l'angle compris entre les plans de ses deux côtés. Définition d'un angle sphérique.

356. Donc deux côtés d'un triangle sphérique sont perpendiculaires entr'eux quand leurs plans le sont. Que sont entr'eux deux côtés d'un triangle sphérique quand leurs plans sont perpendiculaires ?

357. La somme des trois côtés d'un triangle sphérique est toujours moindre que 360°. Quel est le nombre de degrés au-dessous duquel se trouve toujours la somme des 3 côtés d'un triangle sphérique ?

358. Chaque côté d'un triangle sphérique est plus petit que la somme des deux autres. Quelle est la grandeur d'un côté quelconque d'un triangle sphérique par rapport à la somme des deux autres ?

359. Un triangle sphérique peut être tri-rectangle, c'est-à-dire que chacun de ses trois angles peut être droit. Un triangle sphérique peut-il avoir tous ses angles droits ?

360. Un triangle sphérique peut aussi avoir chacun de ses trois angles obtus. Un triangle sphérique peut-il avoir tous ses angles obtus ?

351. La somme des trois angles d'un triangle sphérique est une quantité variable, bien différente de celle d'un triangle rectiligne qui est toujours la même. La somme des trois angles d'un triangle sphérique est-elle une quantité invariable ?

Suffit-il de connaître deux des angles d'un triangle sphérique pour conclure le troisième ?

362. Donc il ne suffit pas de connaître deux des angles d'un triangle sphérique pour conclure le troisième.

Combien la surface de la sphère contient-elle de triangles tri-rectangles ?

363. La surface de la sphère contient huit triangles tri-rectangles.

Définition de l'axe d'un grand cercle de la sphère.

364. L'axe d'un grand cercle de la sphère est le diamètre de la sphère perpendiculaire au plan de ce cercle.

Définition des pôles d'un grand cercle de la sphère.

365. Les pôles d'un grand cercle de la sphère sont les extrémités de l'axe du grand cercle.

Les deux pôles d'un grand cercle de la sphère sont-ils inégalement éloignés des points de la circonférence de ce grand cercle ?

366. Chacun des deux pôles d'un grand cercle de la sphère est également éloigné de tous les points de la circonférence de ce grand cercle.

Quelle est la mesure de la distance d'un grand cercle de la sphère de chacun des deux pôles à un point quelconque de la circonférence de ce cercle ?

367. La mesure de la distance d'un grand cercle de la sphère de chacun des deux pôles à un point quelconque de la circonférence de ce cercle est un arc de grand cercle de 90°.

Si un point quelconque de la surface de la sphère se trouve éloigné de 90° de deux points pris dans un arc de grand cercle, comment s'appellera ce point ?

368. Si un point quelconque de la surface de la sphère se trouve éloigné de 90° de deux points pris dans un arc de grand cercle, ce point est le pôle de ce grand cercle.

Par deux points pris sur la surface d'une sphère combien peut-on faire passer d'arcs de grand cercle ?

369. Par deux points pris sur la surface d'une sphère on ne peut faire passer qu'un seul arc de grand cercle.

Dans un triangle sphérique tri-rectangle ou bien qui n'aurait que deux angles droits, qu'appelle-t-on hypoténuse ?

370. Dans un triangle sphérique tri-rectangle ou bien qui n'aurait que deux angles droits, ou enfin qui n'en aurait qu'un, on appelle *hypoténuse* le côté opposé à l'angle droit que l'on considère.

Ainsi y eût-il trois angles droits ou deux angles droits, on n'envisage qu'une hypoténuse.

371. Dans un triangle sphérique qui a au moins un angle droit, on appelle *angles obliques* ceux qui ne sont pas opposés à l'hypoténuse.

Qu'entend-on par angles obliques dans un triangle sphérique qui a au moins un angle droit?

Les principes qui précèdent et ceux qui suivent sont démontrés dans mon *Traité spécial de Géométrie.*

372. Dans tout triangle sphérique le sinus d'un des angles est au sinus du côté opposé à cet angle comme le sinus d'un autre angle est au sinus du côté opposé à celui-ci.

Dans tout triangle sphérique quels sont les deux derniers termes d'une proportion dont les deux premiers sont le sinus d'un des angles et le sinus du côté opposé à cet angle?

373. Dans tout triangle sphérique rectangle le rayon est au sinus de l'hypoténuse comme le sinus d'un des angles obliques est au sinus du côté opposé.

Dans tout triangle sphérique rectangle quels sont les 2 derniers termes d'une proportion dont les deux premiers sont le rayon et le sinus de l'hypoténuse?

374. Dans tout triangle sphérique rectangle le rayon est au cosinus d'un angle oblique comme la tangente de l'hypoténuse est à la tangente du côté adjacent à cet angle.

Dans tout triangle sphérique rectangle quels sont les 2 derniers termes d'une proportion dont les deux premiers sont le rayon et le cosinus d'un angle oblique?

375. Dans tout triangle sphérique rectangle le rayon est au cosinus d'un côté de l'angle droit comme le cosinus de l'autre côté est au cosinus de l'hypoténuse.

Dans tout triangle sphérique rectangle quels sont les deux derniers termes d'une proportion dont les deux premiers sont le rayon et le cosinus d'un côté de l'angle droit?

DE LA SPHÈRE.

376. Le globe que nous habitons a deux mouvemens : l'un de rotation, par lequel il tourne autour de son axe ; l'autre de translation, par lequel il opère sa révolution autour du soleil en 365 jours et environ 6 heures.

Les phénomènes que présentent ses mouvemens seront appréciés par un instrument appelé *géocyclique*. (Voy. ci-après page 257.)

Je vais rendre successivement compte des divers instrumens uranographiques que je possède pour la démonstration de mes cours.

PLANÉTAIRE.

Combien y a-t-il de planètes, et quelles sont-elles ?

377. Cet instrument contient les onze planètes, savoir : Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Vesta, Junon, Cérès, Pallas, Jupiter, Saturne, Uranus (ou Herschel), avec leurs mouvemens simultanés qui s'opèrent par le moyen d'une manivelle.

Combien la Terre, Jupiter, Saturne et Herschel ont-ils respectivement de satellites ?

Il contient aussi la Lune, satellite de la Terre, les quatre satellites de Jupiter, les sept satellites de Saturne avec son anneau, et les six satellites d'Herschel.

L'instrument donne le mouvement de la Lune, mais il ne donne pas celui des autres satellites.

Durée approximative des révolutions des planètes autour du Soleil.

Quelle est la durée respective des révolutions des planètes autour du Soleil ?

	ans.	mois.
1o. Mercure.		3.
2o. Vénus.		7 1/2.
3o. La Terre.	1.	
4o. Mars.	1	10 1/2.
5o. Vesta.	3	8.
6o. Junon.	4	4.
7o. Cérès.	4	7.
8o. Pallas.	4	7.
9o. Jupiter.	11	10.
10o. Saturne.	29	4.
11o. Uranus (ou Herschel).	84.	

L'instrument représente le mouvement de ces planètes dans la proportion du temps indiqué ci-dessus.

Ainsi, Mercure fait quatre fois le tour du Soleil pendant que la Terre ne l'opère qu'une fois ;

Combien de fois Mercure fait-il le tour du Soleil pendant que la Terre ne l'opère qu'une fois ?

Vénus fait presque deux révolutions lorsque la Terre n'en fait qu'une ;

Combien de révolutions fait Vénus pendant une seule de la Terre ?

Mars fait un peu plus d'une demi-révolution dans l'intervalle où la Terre en fait une entière, etc. ;

Combien de révolutions fait Mars autour du Soleil dans l'intervalle d'une révolution de la Terre ?

Jupiter ne fait guère que 1/12 de révolution pendant que la Terre en fait une ;

Combien de révolutions fait Jupiter autour du Soleil tandis que la Terre n'en fait qu'une ?

Uranus (ou Herschel) ne fait que 1/84 de révolution lorsque la Terre en fait une.

Combien de révolutions fait Herschel autour du Soleil lorsque la Terre n'en fait qu'une ?

Il faudrait donc, pour s'assurer que l'instrument rend tous les mouvemens avec précision, faire faire, par exemple, quatre-vingt-quatre révolutions à la Terre autour du Soleil, pour qu'Herschel en fît une, ce qui absorberait un temps précieux de quelques heures. Pour obvier à cet inconvénient, il n'y a qu'à prendre des sous-multiples, et ne faire parcourir que quelques degrés aux planètes dont la révolution est beaucoup plus longue que celle de la Terre, en considérant le temps de la révolution de la Terre comme unité de mouvement.

Durée relative du mouvement des planètes, celle de la Terre étant représentée par l'unité.

Mercure.		1/4.
Vénus.		7/12.
La Terre.	1	»
Mars.	1	10/12.
Vesta.	3	8/12.
Junon.	4	4/12.
Cérès.	4	7/12.
Pallas.	4	7/12.
Jupiter.	11	10/12.
Saturne.	29	4/12.
Uranus (ou Herschel.	84	»

Le rapport de Mercure à la Terre (1) étant comme 1/4 est à 1, Mercure fera quatre révo-

(1) C'est pour abréger que je m'exprime ainsi; il faudrait dire : *rapport de la durée du mouvement.*

lutions pour une de la Terre AUTOUR DU SOLEIL.

Le rapport de Vénus à la Terre étant comme 7/12 est à 1, Vénus fera un peu moins de deux révolutions pour une de la Terre.

Le rapport de Mars à la Terre étant comme 1. 10/12 est à 1, Mars fera un peu plus d'une demi-révolution pour une de la Terre.

Le rapport de Vesta à la Terre étant comme 3. 8/12 est à 1, Vesta fera un peu plus d'un quart de révolution (ou trois signes) pour une de la Terre.

Le rapport de Junon à la Terre étant comme 4. 4/12 est à 1, Junon fera un peu moins d'un quart de révolution (ou 3 signes) pour une de la Terre.

Le rapport de Cérès à la Terre étant comme 4. 7/12 est à 1, Cérès fera un peu plus d'un cinquième de révolution (ou 2 signes et demi environ) pour une de la Terre.

Le rapport de Pallas à la Terre étant comme 4. 7/12 est à 1, Pallas fera un peu plus d'un cinquième de révolution (ou 2 signes et demi environ) pour une de la Terre.

Le rapport de Jupiter à la Terre étant à-peu-près comme 12 est à 1, Jupiter fera un douzième de révolution (ou un signe) pour une de la Terre.

Pour pouvoir apprécier le mouvement des deux planètes, Saturne et Herschel, il est nécessaire de faire faire plusieurs révolutions à la Terre.

Ainsi, le rapport de Saturne à la Terre étant à-peu-près comme 30 est à 1, une révolution de la Terre ne ferait parcourir à Saturne que la trentième partie de 360 degrés, c'est-à-dire 12 degrés. Il faut deux fois et demie 12 degrés pour faire un signe ou 30 degrés; il n'y a donc qu'à faire faire deux révolutions et demie à la Terre, pour que Saturne parcoure un signe.

Le rapport d'Herschel à la Terre étant comme 84 est à 1; une révolution de la Terre ne ferait parcourir à Herschel que la 84e. partie de 360 degrés, c'est-à-dire environ 4 degrés 1/4. Il faut environ sept fois 4 degrés 1/4 pour faire un signe ou 30 degrés; il n'y a donc qu'à faire faire sept révolutions à la Terre pour qu'Herschel parcoure un signe.

Combien de fois la Lune fait-elle le tour de la Terre dans l'intervalle d'une année ?

La Lune fait treize fois le tour de la Terre dans l'intervalle d'une année qu'elle met à faire une seule révolution autour du Soleil avec la Terre qui l'emporte avec elle.

DISTANCES EN LIEUES DES PLANÈTES AU SOLEIL

(en négligeant ce qui est au-dessous des unités de millions).

Quelles sont en lieues les distances respectives des onze planètes au Soleil ?

		Millions de lieues.
1°.	Mercure.	12
2°.	Vénus.	22
3°.	La Terre.	35
4°.	Mars.	48
5°.	Vesta.	78
6°.	Junon.	84

7°. Cérès.	87
8°. Pallas.	87
9°. Jupiter.	164
10°. Saturne.	302
11°. Herschel.	607

380. La distance de la Lune à la Terre est d'environ quatre-vingt mille lieues. Quelle est la distance de la Lune à la Terre ?

381. On appelle PLANÈTES INFÉRIEURES celles dont les orbites sont renfermées dans l'orbite de la terre, et PLANÈTES SUPÉRIEURES celles dont les orbites renferment l'orbite de la Terre. Qu'entend-on par planètes inférieures, et par celles supérieures ?

382. Les planètes inférieures sont Mercure et Vénus. Quelles sont les planètes inferieures?

383. Les planètes supérieures sont Mars, Vesta, Junon, Cérès, Pallas, Jupiter, Saturne et Herschel. Quelles sont les planètes supérieures?

Le planisphère fait comprendre cette dernière circonstance d'une manière plus satisfaisante que le planétaire.

384. On nomme *orbite* d'une planète le chemin qu'elle parcourt dans son mouvement de translation autour du Soleil. Qu'entend-on par orbite d'une planète?

INSTRUMENT GÉOCYCLIQUE.

385. Cet instrument contient la Terre, la Lune, et le Soleil représenté par une lampe.

Il est éminemment propre à faire comprendre la différence des saisons, la différence de longueur des jours et des nuits, les phases de la Lune, les éclipses de Soleil et de Lune, etc., etc.

De combien de degrés l'axe de la Terre est-il incliné sur son orbite?

386. L'axe de la Terre est incliné de 23 degrés 27 minutes sur son orbite.

Quel est le nombre des principaux cercles de la sphère, et quels sont-ils?

387. Les principaux cercles de la sphère ou de la Terre sont au nombre de onze, savoir :

1°. Le Méridien.
2°. L'Équateur.
3°. L'Écliptique.
4°. Le Colure des équinoxes.
5°. Le Colure des solstices.
6°. L'Horizon.
7°. Le Tropique du Cancer.
8°. Le Tropique du Capricorne.
9°. Le Cercle polaire arctique.
10°. Le Cercle polaire antarctique.
11°. Le Zodiaque.

Comment s'appelle l'extrémité supérieure de l'axe de la Terre?

388. L'extrémité supérieure de l'axe de la Terre s'appelle *pôle boréal;*

Comment se nomme l'extrémité inférieure de l'axe de la Terre?

389. L'extrémité inférieure se nomme *pôle austral.*

En combien de classes se distinguent les onze principaux cercles de la sphère?

390. Les onze principaux cercles de la sphère se distinguent en deux classes, savoir :

Qu'entend-on par grands cercles de la sphère?

391. 1°. Les grands cercles, c'est-à-dire ceux dont le centre est le même que le centre de la sphère.

Quels sont les grands cercles de la sphère?

392. Les grands cercles de la sphère sont le Méridien, l'Équateur, l'Écliptique, le Zodiaque, les deux Colures et l'Horizon.

Qu'entend-on par petits cercles de la sphère?

393. 2°. Les petits cercles, c'est-à-dire ceux dont le centre n'est pas le même que le centre de la sphère.

394. Les petits cercles de la sphère sont les deux Tropiques et les deux Polaires. Quels sont les petits cercles de la sphère ?

395. Le méridien est un grand cercle qui passe par les pôles de la sphère, et qui tourne à volonté autour de l'axe de la sphère. Qu'est-ce que le Méridien ?

396. L'équateur est un grand cercle de la sphère dont tous les points sont également éloignés de l'un et l'autre pôle du globe ; il coupe la sphère en deux parties égales, que l'on appelle *hémisphères.* Qu'est-ce que l'Équateur ?

397. L'hémisphère qui est au-dessus de l'équateur se nomme hémisphère *boréal* ou *septentrional.* Qu'entend-on par hémisphère boréal ou septentrional ?

398. L'hémisphère au-dessous de l'équateur s'appelle hémisphère *austral* ou *méridional.* Qu'appelle-t-on hémisphère austral ou méridional ?

399. L'écliptique est un grand cercle de la sphère, situé dans la zône marquée par les deux tropiques, et qui touche les deux tropiques. Qu'est-ce que l'Écliptique ?

400. Cette zône est de 46 degrés 54 minutes, savoir : 23 degrés 27 minutes au-dessus de l'équateur, et autant au-dessous. De combien de degrés se compose la zône située entre les deux tropiques ?

401. L'écliptique se divise en douze signes, savoir : En combien de signes se divise l'écliptique, et quels sont-ils ?

1°. Le Bélier.
2°. Le Taureau. } Printemps.
3°. Les Gémeaux.

4°. Le Cancer ou l'Écrevisse.
5°. Le Lion. } Été.
6°. La Vierge.

17..

7°. La Balance. 8°. Le Scorpion. 9°. Le Sagittaire.	Automne.
10°. Le Capricorne. 11°. Le Verseau. 12°. Les Poissons.	Hiver.

Qu'est-ce que le zodiaque?

Le zodiaque est une bande céleste dont l'écliptique occupe le milieu.

Quelle est la largeur du zodiaque?

Cette bande a environ 17° de largeur, c'est-à-dire 8° 1/2 de chaque côté de l'écliptique.

A quoi sert le zodiaque?

Le zodiaque sert à indiquer la latitude de celle des planètes qui a la plus grande latitude, selon les anciens.

Cette planète s'appelle *Vénus*.

Commencement de chaque Signe.

1°. Du Bélier.	20 mars.
2°. Du Taureau. . . .	20 avril.
3°. Des Gémeaux. . . .	21 mai.
4°. Du Cancer ou de l'Écrevisse.	21 juin.
5°. Du Lion.	23 juillet.
6°. De la Vierge. . . .	23 août.
7°. De la Balance. . . .	23 septembre.
8°. Du Scorpion. . . .	23 octobre.
9°. Du Sagittaire. . . .	22 novembre.
10°. Du Capricorne. . . .	21 décembre.
11°. Du Verseau. . . .	20 janvier.
12°. Des Poissons. . . .	18 février.

402. Le colure des équinoxes est un grand cercle de la sphère qui passe par les deux équinoxes.

Qu'est-ce que le colure des équinoxes ?

403. Le colure des solstices est un grand cercle de la sphère qui passe par les deux solstices, et qui est perpendiculaire au colure des équinoxes.

Qu'est-ce que le colure des solstices ?

404. L'horizon est un grand cercle sur lequel paraît s'asseoir la partie visible du ciel lorsqu'on est placé de manière à ce que la vue ne soit bornée par aucun endroit.

Qu'est-ce que l'horizon ?

Il y a donc autant d'horizons différens qu'il y a de points différens sur la Terre.

405. Le tropique du cancer est un petit cercle de la sphère parallèle à l'équateur, et situé dans l'hémisphère boréal.

Qu'est-ce que le tropique du cancer ?

406. Il est éloigné de l'équateur de 23 degrés 27 minutes.

De combien le tropique du cancer est-il éloigné de l'équateur ?

407. Le tropique du capricorne est un petit cercle de la sphère, parallèle à l'équateur, et situé dans l'hémisphère austral.

Qu'est-ce que le tropique du capricorne ?

408. Il est éloigné de l'équateur de 23 degrés 27 minutes.

De combien le tropique du capricorne, est-il éloigné de l'équateur ?

409. Le cercle polaire arctique est un petit cercle de la sphère parallèle à l'équateur, et situé dans l'hémisphère boréal.

Qu'est-ce que le cercle polaire arctique ?

410. Il est éloigné du pôle arctique de 23 degrés 27 minutes.

De combien de degrés le cercle polaire arctique est-il éloigné du pôle arctique ?

411. Le cercle polaire antarctique est un petit cercle de la sphère parallèle à l'équateur, et situé dans l'hémisphère austral.

Qu'est-ce que le cercle polaire antarctique ?

De combien de degrés le cercle polaire antarctique est-il éloigné du pôle antarctique ?

412. Il est éloigné du pôle antarctique de 23 degrés 27 minutes.

Qu'est-ce que le solstice ?

413. On appelle *solstice* le moment où les rayons perpendiculaires du Soleil sont à la dernière limite de la zône, sur laquelle ils dardent successivement, soit au nord, soit au sud de l'équateur.

Lors des solstices les jours sont ou les plus longs ou les plus courts.

Combien y a-t-il de solstices et quels sont-ils?

414. Il y a deux solstices : celui d'été et celui d'hiver.

Quand a lieu le solstice d'été ?

415. Le solstice d'été a lieu le 21 juin.

Quand arrive le solstice d'hiver ?

416. Le solstice d'hiver arrive le 22 décembre.

Quelle circonstance représente le solstice d'été par rapport à la longueur du jour ?

417. Le solstice d'été est celui où le jour est le plus long.

Quelle circonstance représente le solstice d'hiver par rapport à la longueur du jour ?

418. Le solstice d'hiver est celui où le jour est le plus court.

Sur quels habitans de la Terre le Soleil darde-t-il perpendiculairement ses rayons à midi lors du solstice d'été ?

419. Au solstice d'été le Soleil darde perpendiculairement à midi ses rayons sur les habitans qui sont sous le tropique du cancer.

Comment la Terre est-elle éclairée au solstice d'été ?

420. A cette époque la Terre est éclairée 23 degrés 27 minutes au-delà du pôle arctique, et se trouve dans les ténèbres 23 degrés 27 minutes en deçà du pôle antarctique.

Sur quels habitans de la Terre le soleil darde-t-il ses rayons perpendiculairement à midi lors du solstice d'hiver ?

421. Au solstice d'hiver, le soleil darde perpendiculairement à midi ses rayons sur les habitans qui sont sous le tropique du Capricorne : c'est l'été pour eux.

Comment la Terre est-elle éclairée au solstice d'hiver ?

422. A cette époque la Terre se trouve dans les ténèbres 23 degrés 27 minutes en deçà du

pôle arctique, et est éclairée d'autant au-delà du pôle antarctique.

423. On nomme *équinoxe* l'époque où le jour est égal à la nuit. Qu'est-ce que l'équinoxe ?

424. Il y a deux équinoxes, celui du printemps et celui de l'automne. Combien y a-t-il d'équinoxes ?

425. L'équinoxe du printemps a lieu le 20 mars. Quand a lieu l'équinoxe du printemps ?

426. Le Soleil darde alors à midi ses rayons perpendiculairement sur les habitans de l'équateur. Sur quels habitans de la Terre le Soleil darde-t-il ses rayons perpendiculairement à midi lors de l'équinoxe du printemps ?

427. A l'équinoxe du printemps le Soleil éclaire tout juste les deux pôles, mais pas au-delà.

428. L'équinoxe d'automne a lieu le 23 septembre. Quand a lieu l'équinoxe d'automne ?

429. Le Soleil darde alors à midi ses rayons perpendiculairement sur les habitans de l'équateur. Sur quels habitans de la Terre le Soleil darde-t-il ses rayons perpendiculairement à midi lors de l'équinoxe d'automne ?

430. A l'équinoxe d'automne le Soleil éclaire tout juste les deux pôles, mais pas au-delà; exactement comme à l'équinoxe du printemps.

431. La distance de chaque pôle à l'équateur est de 90°. Quelle est en degrés la distance de chaque pôle à l'équateur ?

432. On appelle *latitude* la distance d'un lieu de la Terre à l'équateur. Qu'entend-on par latitude ?

433. Il y a deux espèces de latitudes, la latitude *septentrionale* et la latitude *méridionale*. Combien y a-t-il d'espèces de latitudes, et quelles sont-elles ?

434. La latitude septentrionale se compte en allant de l'équateur vers le pôle arctique. Comment se compte la latitude septentrionale ?

Comment se compte la latitude méridionale ?

435. La latitude méridionale se compte en allant de l'équateur au pôle antarctique.

Qu'est-ce que la longitude ?

436. On appelle *longitude* la distance qui existe depuis un méridien jusqu'à un lieu donné.

Chaque nation est libre de placer son méridien où elle veut. Il serait plus commode que tous les pays adoptassent le même.

Par où les Français font-ils passer à présent le méridien ?

437. Les Français plaçaient anciennement leur méridien à l'île de Fer, la plus occidentale des Canaries : ils le font passer maintenant par l'Observatoire de Paris.

Sur quel cercle se comptent les degrés de longitude ?
Sur quel cercle se comptent les degrés de latitude ?

438. Les degrés de longitude se comptent sur l'équateur, et les degrés de latitude sur le méridien.

Qu'est-ce que le zénith ?
Qu'est-ce que le nadir ?

439. On appelle *zénith* le point du ciel visible qui répond perpendiculairement à la tête de l'observateur, et *nadir* le point du ciel invisible qui est directement sous ses pieds.

C'est la Terre qui tourne autour du Soleil, et non le Soleil autour de la Terre.

Il y a bien des manières de prouver que la Terre tourne autour du Soleil. La preuve par l'absurde n'est pas moins frappante que la preuve directe. La voici :

Si le Soleil tournait autour de la Terre, comme il est à la distance moyenne de 35 millions de lieues, l'orbite qu'il parcourrait en vingt-quatre heures serait d'environ six fois 35 millions de lieues, ou 210 millions de lieues. Donc

il parcourrait 210 millions de lieues en vingt-quatre heures, c'est-à-dire 243 lieues par seconde.

Mais l'absurdité de prétendre la Terre immobile est bien plus frappante, si nous prenons pour argument la distance des étoiles; car l'étoile la plus rapprochée de nous en est au moins cent mille fois aussi éloignée que l'est le Soleil. Si la Terre était immobile, il faudrait nécessairement que cette étoile fît le tour de la Terre en vingt-quatre heures, c'est-à-dire qu'il faudrait qu'elle fît six fois 100 mille fois 35 millions de lieues en vingt-quatre heures, ou 21 trillions de lieues en vingt-quatre heures, ce qui fait plus de 243 millions de lieues par seconde!!! Quel est l'entêtement qui pourrait tenir devant cette argumentation!

Des Phases de la Lune.

440. On dit que la Lune est en *conjonction* lorsqu'elle se trouve placée entre le Soleil et la Terre. Dans quel cas la Lune est-elle en conjonction?

441. Quand la Lune est en conjonction, on l'appelle vulgairement *nouvelle Lune*. Quel terme est synonyme avec nouvelle Lune?

442. Pendant la nouvelle Lune, cet astre n'est éclairé par le Soleil que du côté qui n'est pas aperçu de la Terre. Quel est le côté de la Lune qui est éclairé par le Soleil pendant la nouvelle Lune?

443. A mesure que la Lune s'éloigne de la conjonction, elle nous montre sa partie éclairée, qui commence par un filet de lumière. Arrivée à son *premier quartier*, nous apercevons la moi-

tié de son disque qui s'éclaire successivement de plus en plus, jusqu'à ce que cet astre soit arrivé à son *opposition.* C'est le moment où la Terre se trouve entre le Soleil et la Lune.

Comment appelle-t-on la situation de la Lune lorsque la Terre se trouve entre le Soleil et cet astre ?

Comment la Lune est-elle éclairée lorsqu'elle est arrivée à son opposition ?

444. Quand la Lune est en opposition on l'appelle vulgairement *pleine Lune :* tout son disque est alors éclairé.

Lorsque la Lune s'éloigne de l'opposition, le côté de cet astre qui est tourné vers nous perd peu à peu de sa clarté jusqu'à ce que nous n'apercevions plus que la moitié de son disque : dans ce moment-là la Lune est à son second quartier, que l'on appelle le *dernier quartier.*

La Lune, en s'éloignant de son dernier quartier, continue à perdre peu à peu sa lumière jusqu'à ce qu'elle soit arrivée à sa conjonction, qui est le point de son départ : alors sa lumière a tout-à-fait disparu, et cet astre a fait une révolution complète.

Quel espace a parcouru la Lune depuis la conjonction jusqu'au premier quartier ?

Quel espace a parcouru la Lune depuis la conjonction jusqu'à l'opposition, depuis la conjonction jusqu'au dernier quartier ?

445. De la conjonction au premier quartier, la Lune a parcouru le quart de son orbite ; lorsqu'elle est arrivée à l'opposition, elle en a parcouru la moitié ; à son dernier quartier, elle est aux trois quarts de son orbite, et à la conjonction, elle a achevé sa course.

Qu'entend-on par syzygies et quadratures ?

446. On donne le nom de *syzygies* à la conjonction et à l'opposition, et celui de *quadrature* à son premier et à son dernier quartier.

De combien de degrés l'orbite de la Lune est-elle inclinée sur l'orbite de la Terre ?

447. L'orbite de la Lune est inclinée d'un peu plus de cinq degrés sur l'orbite de la Terre.

On peut figurer les deux orbites de la Terre et de la Lune par deux cerceaux fixés par un diamètre commun et un peu entr'ouverts. Ils se couperont en deux points.

Comment peut-on figurer les deux orbites de la Terre et de la Lune ?

448. Les deux points où se coupent l'orbite de la Terre et l'orbite de la Lune s'appellent les nœuds de la Lune.

Comment s'appellent les deux points où se coupent l'orbite de la Terre et celle de la Lune ?

449. La Lune tourne autour de la Terre d'occident en orient, au lieu que ses nœuds vont d'orient en occident.

Dans quel sens la Lune tourne-t-elle autour de la Terre, et dans quels sens vont ses nœuds ?

450. La Lune passe deux fois par mois dans ses nœuds.

Combien de fois par mois la Lune passe-t-elle par ses nœuds ?

451. Il ne peut y avoir éclipse de Soleil ou de Lune que dans les nœuds de la Lune.

Dans quels cas peut-il y avoir éclipse de Soleil ou de Lune ?

452. Les éclipses n'ont jamais lieu que dans l'opposition ou la conjonction.

453. La conjonction donne lieu à l'éclipse de Soleil, et l'opposition à l'éclipse de Lune.

A quelle éclipse donne lieu la conjonction ? A quelle éclipse donne lieu l'opposition ?

454. Mais soit dans la conjonction, soit dans l'opposition, il ne peut y avoir éclipse si le Soleil, la Terre et la Lune ne se trouvent pas sur la même ligne droite, c'est-à-dire si la Lune n'est pas dans ses nœuds.

455. La durée de la révolution de la Lune autour de la Terre est d'un peu plus de vingt-sept jours.

Quelle est la durée de la révolution de la Lune autour de la Terre?

INSTRUMENT GÉOZODIACAL.

Cet instrument représente la position de la Terre au commencement de chaque signe du zodiaque.

INSTRUMENT DES QUATRE SAISONS.

Il sert à représenter la position de la Terre aux deux solstices et aux deux équinoxes.

INSTRUMENT POUR LA PRÉCESSION DES ÉQUINOXES.

Les équinoxes ont lieu tous les ans vingt minutes vingt-cinq secondes avant que la Terre soit en conjonction avec le Soleil et avec la même étoile qu'à l'équinoxe de l'année précédente.

Cette différence, appelée *précession des équinoxes*, fait que le Soleil semble rétrograder dans les signes du zodiaque d'un degré en soixante-douze ans, et de trente degrés (ou un signe entier) en deux mille cent soixante ans; en sorte que cette rétrogradation parcourt tout l'écliptique en vingt-six mille ans environ.

Hipparque, qui vivait environ cent vingt-huit ans avant notre ère, est le premier qui ait observé le déplacement des étoiles par rapport aux équinoxes. De son temps les douze constellations du zodiaque répondaient aux douze signes; ainsi l'équinoxe d'automne, par exemple, avait lieu dans la constellation de la balance; et comme il y a eu rétrogradation d'un signe, c'est maintenant dans la constellation de la Vierge que l'équinoxe arrive.

L'instrument de la précession des équinoxes est fait de manière à ce que chaque révolution représente un laps de temps d'environ deux mille cent soixante ans; ainsi douze révolutions ramènent la même situation.

MÉCANIQUE.

456. La *mécanique* est la science de l'équilibre et du mouvement. Définition de la mécanique.

457. Toute cause qui fait mouvoir ou qui tend à faire mouvoir un corps est appelée *force*. Définition du mot force.

458. Lorsque les forces appliquées simultanément à un corps s'entredétruisent quant à leurs effets, il en résulte *l'équilibre*. Définition de l'équilibre.

459. Les principales divisions de la mécanique sont la *statique*, la *dynamique*, l'*hydrostatique* et l'*hydraulique*. Quelles sont les principales divisions de la Mécanique ?

460. La statique a pour objet l'équilibre des forces appliquées aux corps solides. Définition de la statique.

461. La dynamique nous enseigne à explorer les circonstances du mouvement des corps solides. Définition de la dynamique.

462. L'hydrostatique est la science qui s'occupe de l'équilibre des fluides. Définition de l'hydrostatique.

463. L'hydraulique est l'art de conduire et d'élever les eaux. Définition de l'hydraulique.

464. Un corps est la masse ou quantité de matière que contient toute substance. Qu'est-ce qu'un corps ?

465. Un corps est ou dur, ou mou, ou élastique. Quels sont les trois principaux accidens d'un corps ?

466. Un corps dur est celui dont les parties ne cèdent à aucune percussion, mais se conservent sans altération. Définition d'un corps dur.

Définition d'un corps mou.

467. Un corps mou est celui dont les parties cèdent à quelque choc, sans reprendre leur forme, et en éprouvent de l'altération.

Définition d'un corps élastique.

468. Un corps est élastique lorsque ses parties cèdent à la percussion pour reprendre immédiatement leur forme, de manière à ce que le corps recouvre la même figure qu'il avait auparavant.

Y a-t-il des corps ou durs, ou mous, ou élastiques dans un sens absolu ?

469. Nous ne connaissons pas de corps qui soient, dans un sens absolu, ou durs, ou mous, ou élastiques : ils participent tous de ces propriétés plus ou moins.

470. Les corps se subdivisent aussi en *solides* ou *fluides*.

Qu'est-ce qu'un corps solide ?

471. Un corps solide est celui dont les parties ne se déplacent pas facilement, et qui conserve sa figure primitive.

Qu'entend - on par corps fluide ?

472. On entend par corps fluide celui dont les parties cèdent à la plus légère impression, et se déplacent facilement, de manière à ce que sa surface, abandonnée à elle-même, redevient tout-à-fait unie.

Définition de la densité.

473. La *densité* est le poids proportionnel ou la quantité de matière de chaque corps.

Ainsi, dans deux sphères de même diamètre, si le poids de l'une est d'une livre, et celui de l'autre deux livres, la densité de la dernière est double de celle de la première.

Définition du mouvement.

474. Le mouvement est un changement continuel et successif de place.

Qu'entend - on par mouvement uniforme d'un corps ?

475. Si le corps se meut également, ou franchit des espaces égaux en temps égaux, ce mouvement s'appelle *uniforme*.

476. Si le mouvement d'un corps augmente ou diminue dans des intervalles de temps égaux, ce mouvement s'appelle *variable*.

Qu'entend-on par mouvement variable d'un corps ?

477. Lorsque le mouvement d'un corps augmente dans des intervalles de temps égaux, on l'appelle *accéléré*.

Qu'est-ce que le mouvement accéléré d'un corps?

478. Si le mouvement d'un corps diminue dans des intervalles de temps égaux, il prend le nom de *mouvement retardé*.

Qu'est-ce que le mouvement retardé d'un corps?

479. Lorsqu'un corps qui se meut est considéré relativement à un autre corps en repos, son mouvement s'appelle *absolu*.

Qu'entend-on par mouvement absolu d'un corps ?

480. Quand un corps en mouvement est comparé à d'autres corps qui le sont aussi, le mouvement du premier se nomme *relatif*.

Qu'entend-on par mouvement relatif d'un corps ?

481. La *célérité* est un accident du mouvement par lequel un corps franchit un certain espace dans un temps donné.

Qu'est-ce que la célérité d'un corps?

Ainsi, si un corps en mouvement franchit uniformément 40 pieds en quatre secondes de temps, on dit qu'il se meut avec la célérité de 10 pieds par seconde.

482. La *quantité de mouvement* est la puissance des corps mouvans par laquelle ils tendent continuellement à quitter leur place actuelle, ou par laquelle ils repoussent tout obstacle qui s'oppose à leur mouvement.

Qu'est-ce que la quantité de mouvement ?

483. On distingue les forces en *motrice*, *accélératrice* et *retardatrice*.

En combien de classes distingue-t-on les forces ?

484. La force motrice est la puissance d'un agent de produire du mouvement.

Définition de la force motrice.

La force motrice est égale ou proportionnelle

à la quantité de mouvement qu'elle engendre dans un corps, lorsqu'elle agit soit par percussion, ou pendant un certain temps, comme force permanente.

Définition de la force accélératrice ou retardatrice.

485. On entend ordinairement par *force accélératrice* ou *retardatrice* celle qui n'affecte que la vitesse : en d'autres termes, c'est la force par laquelle la vitesse est accélérée ou retardée.

486. La force accélératrice ou retardatrice est en raison directe de la force motrice et en raison inverse de la masse du corps mis en mouvement.

Ainsi, si un corps du poids de deux livres est mis en mouvement par une force motrice de 40 livres, la force accélératrice est de 20.

Mais si la même force de 40 livres agit sur un autre corps du poids de 4 livres, la force accélératrice n'est, dans ce dernier cas, que de 10 : elle n'est donc que de la moitié de la première, et ne produira que la moitié de la vitesse.

Définition de la gravité ou pesanteur.

487. La *gravité* ou la *pesanteur* est cette force par laquelle un corps tend à tomber.

Quand la pesanteur est-elle appelée absolue ?

488. La pesanteur est appelée *absolue* lorsque le corps est dans un espace vide.

Lorsqu'un corps est plongé dans un fluide, quelle dénomination prend sa pesanteur ?

489. On donne à la pesanteur le nom de *relative* lorsque le corps est plongé dans un fluide.

Définition de la pesanteur spécifique.

490. La pesanteur spécifique est le rapport des poids de différens corps d'égale grandeur ; elle est donc proportionnelle à la grandeur des corps.

491. Axiôme. Tout corps s'efforce naturellement à rester dans son état actuel, soit qu'il soit

en repos ou qu'il se meuve uniformément en droite ligne.

492. Le changement de mouvement par une force extérieure est toujours proportionnel à cette force et dans la direction de la ligne dans laquelle elle agit.

493. L'action et la réaction entre deux corps sont égales et contraires, c'est-à-dire, de l'action et de la réaction résultent des changemens égaux de mouvement dans les corps qui agissent les uns sur les autres; et ces changemens sont dirigés vers des parties contraires.

De la Statique.

494. Les grandeurs et directions relatives de deux forces quelconques peuvent être représentées par deux lignes droites qui soutiendront entr'elles les relations des forces, et qui formeront un angle égal à celui des directions des forces.

Par quoi peuvent être représentées les grandeurs et directions relatives de deux forces quelconques ?

495. On appelle *résultante* une force équivalente à deux ou un plus grand nombre de forces agissant à-la-fois sur un point ou sur un corps.

Qu'est-ce que la résultante ?

496. Ces forces séparées portent le nom de *constituantes* ou *composantes*.

Qu'entend-on par forces constituantes ou composantes ?

497. L'opération par laquelle est déterminée la *résultante* de deux ou un plus grand nombre de forces au même point, ou à la même ligne, ou au même corps, s'appelle la *composition des forces*.

Comment s'appelle l'opération par laquelle est déterminée la résultante de deux ou un plus grand nombre de forces au même point, ou à la même ligne, ou au même corps ?

A quoi est égale la résultante de deux ou un plus grand nombre de forces qui agissent sur la même ligne ?

498. La résultante de deux ou un plus grand nombre de forces qui agissent sur la même ligne, dans la même direction, est égale à leur somme.

Si certaines forces agissent dans une direction, et d'autres dans une direction immédiatement opposée, à quoi sera égale la résultante ?

499. Si certaines forces agissent dans une direction, et d'autres dans une direction immédiatement opposée, la résultante sera égale à l'excès de la somme des forces agissant dans une direction sur la somme de celles qui agissent dans la direction opposée.

Si des forces parallèles agissent dans des directions opposées, quelques-unes, par exemple, en haut, d'autres en bas; et qu'on cherche les résultantes de la première et de la seconde classe séparément, comment sera exprimée la résultante générale ?

500. Si des forces parallèles agissent dans des directions opposées, quelques-unes, par exemple, en haut, d'autres en bas; cherchez les résultantes de la première et de la seconde classe séparément, la résultante générale sera exprimée par la différence des deux premières.

Comment appelle-t-on le point par lequel passe la résultante de forces parallèles ?

501. Le point par lequel passe la résultante de forces parallèles s'appelle *le centre des forces parallèles*.

Comment sera représentée la résultante de deux forces agissant dans un seul plan ?

502. La résultante de deux forces agissant dans un seul plan sera représentée en direction et en grandeur par la diagonale du parallélogramme construit sur les directions de ces forces.

Forces mécaniques.

Que signifient les mots poids et force quand ils sont opposés l'un à l'autre ?

503. *Poids* et *force*, quand ils sont opposés l'un à l'autre, signifient le *corps mis en mouvement*, et *le corps qui le meut*, ou bien *le patient* et *l'agent*.

La force est l'agent qui meut ou s'efforce de mouvoir le patient ou le poids.

504. *Les forces mécaniques* sont de certains instrumens simples que l'on emploie ordinairement à élever des poids trop grands pour que les forces naturelles puissent suffire. Qu'entend-on par forces mécaniques ?

Les principales forces mécaniques sont au nombre de huit, savoir : Quelles sont les principales forces mécaniques ?

Le levier, la poulie, les moufles, le cric, le treuil ou cabestan ou tour, le plan incliné, la vis, le coin.

505. Le levier est une verge inflexible soutenue par un point d'appui appelé *le centre du mouvement*. Définition du levier.

506. La poulie est une petite roue faite ordinairement de buis ou de cuivre, dont la circonférence est creusée en gorge pour recevoir un cordon. Elle est traversée par un axe dont les extrémités entrent dans une chape. Définition de la poulie.

507. Les moufles sont un système de poulies assemblées dans une même chape sur le même axe ou sur des axes particuliers. Définition des moufles.

On emploie ordinairement deux moufles : l'un attaché à la puissance, et l'autre lié au poids. Combien emploie-t-on ordinairement de moufles ?

508. Le tour, treuil, ou cabestan, est composé d'un cylindre horizontal ou vertical, mobile autour de son axe, et sur lequel s'enveloppe un cordage au bout duquel est attaché au poids qu'on veut approcher de la machine. Ce poids est mu par des puissances appliquées à l'extrémité d'un ou plusieurs leviers fixés perpendiculairement à l'axe du cylindre. Description du tour, treuil ou cabestan.

509. Le cric est composé d'une barre de fer dentée d'un côté et retenue par une chape dans Description du cric.

laquelle cette barre est mobile dans le sens de sa longueur; les dents de la barre engrènent avec celles d'un pignon qu'une puissance fait tourner au moyen d'une manivelle.

Définition du plan incliné.

510. Le plan incliné est un plan qui n'est pas perpendiculaire à l'horizon.

A quoi s'emploie le plan incliné?

Le plan incliné s'emploie avec avantage à élever des corps pesans dans certaines situations qui se prêtent merveilleusement à rendre ces corps moins pesans.

Dans quel rapport est la force acquise par le plan incliné?

511. La force acquise par le plan incliné est dans le rapport de la longueur du plan à sa hauteur.

512. Le plan incliné trouve son emploi dans quelques circonstances où les autres forces mécaniques ne peuvent convenablement être mises en usage, ou bien il peut leur servir d'auxiliaire.

On peut s'en servir, par exemple, à faire descendre de grands tonneaux dans une cave, ou à les en faire sortir.

Définition de la vis.

513. La vis est un cylindre droit à la surface duquel adhère un filet ou corps saillant qui fait partout un même angle avec la génératrice du cylindre.

Définition du pas de la vis.

514. Le pas de la vis est l'intervalle compris entre deux filets consécutifs, mesuré parallèlement à l'axe du cylindre.

Quelle action emploie-t-on toujours dans les usages de la vis?

Dans les usages de la vis, on emploie toujours l'action d'une force qui tourne autour de l'axe du cylindre par le moyen d'un levier, comme dans le treuil.

515. Le coin est un morceau de bois ou de métal en forme de la moitié d'un prisme rectangulaire. Définition du coin.

Du Centre de gravité.

516. Le centre de gravité d'un corps ou d'un système de corps, est un certain point sur lequel le corps étant librement suspendu, demeurera dans une position quelconque, et ce centre tendra toujours à descendre au lieu le plus bas qu'il puisse atteindre, lorsqu'il n'est pas le point de suspension. Définition du centre de gravité.

517. Si une perpendiculaire à l'horizon, abaissée du centre de gravité d'un corps, tombe sur la base du corps, elle demeurera dans cette position; mais si la perpendiculaire tombe hors de la base, le corps ne restera pas dans cette position, et tombera. Si une perpendiculaire à l'horizon, abaissée du centre de gravité d'un corps, tombe sur la base du corps, qu'arrivera-t-il?

Dynamique.

518. La quantité de matière, dans tous les corps, est en raison composée de leurs grandeurs et densités. Dans quel rapport se trouve la quantité de matière dans tous les corps?

519. Dans les corps semblables, les masses sont comme les densités et les cubes des diamètres. Dans les corps semblables dans quel rapport sont les masses?

520. La quantité de mouvement engendrée par une seule impulsion ou force momentanée, est comme la force génératrice. Dans quel rapport se trouve la quantité de mouvement engendrée par une seule impulsion?

521. Les quantités de mouvement dans les corps mouvans, sont en raison composée des masses et des vitesses. Dans quel rapport sont les quantités de mouvement dans les corps mouvans?

Dans les mouvemens uniformes, dans quel rapport sont les espaces parcourus?

522. Dans les mouvemens uniformes, les espaces parcourus sont en raison composée des vitesses et des temps.

Dans les mouvemens uniformes, dans quel rapport est le temps avec l'espace et avec la vitesse?

523. Dans les mouvemens uniformes, le temps est en raison directe de l'espace et en raison inverse de la vitesse, ou égal à l'espace divisé par la vitesse.

Dans les mouvemens uniformes, lorsque la vitesse est la même, dans quel rapport est le temps avec l'espace?

524. Dans les mouvemens uniformes, lorsque la vitesse est la même, le temps est comme l'espace.

Dans les mouvemens uniformes, lorsque l'espace est le même, dans quel rapport est le temps avec la vitesse?

525. Dans les mouvemens uniformes, lorsque l'espace est le même, le temps est en raison inverse de la vitesse.

Dans quel rapport est la vitesse avec l'espace et avec le temps?

526. La vitesse est en raison directe de l'espace et en raison inverse du temps, ou égale à l'espace divisé par le temps.

Lorsque le temps est le même, dans quel rapport est la vitesse avec l'espace?

527. Lorsque le temps est le même, la vitesse est comme l'espace.

Lorsque l'espace est le même, dans quel rapport est la vitesse avec le temps?

528. Lorsque l'espace est le même, la vitesse est en raison inverse du temps.

Si un plan dur et fixe est frappé par un corps soit mou, soit dur, sans élasticité, dans quelle position sera ce corps?

529. Si un plan dur et fixe est frappé par un corps soit mou, soit dur, sans élasticité, le corps y restera joint.

Si un plan dur et fixe est frappé par un corps parfaitement élastique, quel accident ce dernier éprouvera-t-il?

Mais si le plan est frappé par un corps parfaitement élastique, il en sera repoussé avec la même vitesse avec laquelle il a frappé le plan.

Dans quel rapport est l'effet du choc d'un corps élastique sur un plan dur et fixe avec l'effet d'un corps non élastique, en supposant la vitesse et la masse égales?

530. L'effet du choc d'un corps élastique sur un plan dur et fixe, est double de celui d'un corps non élastique, en supposant la vitesse et la masse égales dans chaque.

531. Donc les corps non élastiques ne perdent par leur choc, que la moitié du mouvement perdu par les corps élastiques, leurs masses et leurs vitesses demeurant les mêmes.

Combien les corps non élastiques perdent-ils de mouvement par leur choc contre un plan dur et fixe proportionnellement à ce que perdent les corps élastiques, leurs masses et leurs vitesses demeurant les mêmes ?

532. Si deux corps parfaitement élastiques se heurtent l'un l'autre, leur vitesse relative sera la même avant et après le choc, c'est-à-dire qu'ils s'éloigneront l'un de l'autre avec la même vitesse avec laquelle ils s'étaient approchés et rencontrés.

Si deux corps parfaitement élastiques se heurtent l'un l'autre, que sera leur vitesse relative avant et après le choc ?

Il ne faut pas entendre par-là que chaque corps aura la même vitesse après le choc qu'auparavant, car elle variera selon le rapport des masses des deux corps; cela veut seulement dire que la vitesse de l'un sera après le choc accrue, et l'autre diminuée de telle manière qu'il y aura la même différence qu'auparavant dans une seule et même direction.

533. Un corps lancé directement en haut avec une certaine vitesse, perdra des vitesses égales dans des temps égaux.

Que perdra un corps lancé directement en haut avec une certaine vitesse ?

534. Si un corps est lancé dans le libre espace, soit parallèlement à l'horizon, soit dans une direction oblique, par la force de la poudre à canon ou par tout autre agent, il décrira, par ce mouvement, conjointement avec l'action de la gravité, la ligne courbe appelée *parabole*.

Si un corps est lancé dans le libre espace, soit parallèlement à l'horizon, soit dans une direction oblique, par la force de la poudre à canon, ou par tout autre agent, quelle ligne décrira-t-il par ce mouvement conjointement avec l'action de la gravité ?

535. Pour trouver le nombre de pieds qu'un boulet de canon parcourt par seconde, il faut diviser le double du poids de la charge de poudre par le poids du boulet, extraire la racine

Que faut-il faire pour trouver le nombre de pieds qu'un boulet de canon parcourt par seconde ?

542. *Le mouvement angulaire* d'un corps ou d'un système de corps est le mouvement d'une ligne qui joint un point quelconque et le centre ou l'axe de mouvement.

Définition du mouvement angulaire d'un corps.

Hydrostatique.

543. Un fluide est élastique lorsqu'il peut être réduit par la compression à un moindre volume et qu'il reprend son premier volume lorsque la pression a cessé, par exemple l'air.

A quel caractère reconnaît-on qu'un fluide est élastique ?

544. Un fluide est non élastique lorsqu'il n'est ni compressible ni expansible, comme l'eau.

A quel caractère reconnaît-on qu'un fluide n'est pas élastique ?

545. Si une partie d'un fluide est élevée plus haut que le reste par une force quelconque, et ensuite abandonnée à elle-même, les parties plus élevées descendront aux régions inférieures, et le fluide ne se reposera que lorsque sa surface sera tout-à-fait unie et de niveau.

Si une partie d'un fluide est élevée plus haut que le reste par une force quelconque, et ensuite abandonnée à elle même, que résultera-t-il ?

546. Si un fluide gravite vers un centre, il tendra à former une figure sphérique dont le centre est le centre de la force : telle est la mer par rapport à la terre.

Si un fluide gravite vers un centre, que tendra-t-il à former ?

547. Lorsqu'un fluide est en repos dans un vase dont la base est parallèle à l'horizon, d'égales parties de la base sont également pressées par le fluide.

Lorsqu'un fluide est en repos dans un vase dont la base est parallèle à l'horizon, qu'arrive-t-il ?

548. Lorsqu'un fluide est pressé par son propre poids ou par toute autre force, il presse également sur un point quelconque dans toutes les directions.

Lorsqu'un fluide est pressé par son propre poids ou par toute autre force, que résulte-t-il ?

Dans un vase contenant un fluide, quelle différence y a-t-il entre la pression du fond et celle des côtés?

549. Dans un vase contenant un fluide, la pression est la même vers le fond que vers les côtés.

Si un corps est plongé dans un fluide de même densité, où restera-t-il?

550. Si un corps est plongé dans un fluide de même densité, il restera à l'endroit où il a été placé.

Si un corps est plongé dans un fluide de moindre densité, qu'arrivera-t-il?

551. Si un corps est plongé dans un fluide de moindre densité, il s'enfoncera.

Si un corps est plongé dans un fluide de plus grande densité, qu'est-ce qui aura lieu?

552. Si un corps est plongé dans un fluide de plus grande densité, il s'élèvera jusqu'à la surface, et surnagera.

Un corps plongé dans un fluide quel poids perd-il?

553. Un corps plongé dans un fluide perd un poids égal à celui du volume du fluide qu'il déplace.

De l'Air.

Qu'est ce que l'air?

554. L'air est un corps fluide qui entoure la terre et gravite sur toutes les parties de sa surface.

Ces propriétés de l'air sont prouvées par l'expérience.

Pourquoi l'air est-il un fluide?

Il est évident que c'est un fluide, en ce qu'il cède facilement à la moindre force qu'il rencontre, sans faire de résistance sensible.

Dans quelles circonstances trouve-t-on que l'air est un corps?

Mais lorsqu'il est mu brusquement par des moyens quelconques, comme par un éventail ou un soufflet, ou lorsqu'un corps le traverse brusquement, il se révèle alors d'une manière sensible comme corps par la résistance qu'il oppose dans de pareils mouvemens.

Quelle est la loi qu'observe l'air en tant qu'il est fluide élastique?

555. L'air est aussi un fluide élastique susceptible de se condenser et de se dilater; et la loi qu'il observe est que sa densité et son élasti-

cité sont proportionnelles à la force ou au poids qui le comprime.

Dans le *Traité de Mécanique* que je vais publier à part, je donnerai les figures avec les démonstrations.

PHYSIQUE.

556. Pendant nombre de siècles, cette science n'a presque été qu'un vain assemblage de systèmes plus ou moins faux et souvent opposés entr'eux. Elle ne se fit vraiment goûter que lorsqu'elle offrit des découvertes utiles, des vérités évidentes; lorsqu'elle put se faire honneur d'être entendue de tout le monde.

Qu'est-ce que la physique ?

557. La physique est la science des corps, et a pour objet de les connaître par leurs propriétés, par les effets qu'ils présentent à nos sens, et par les lois selon lesquelles s'exercent leurs actions réciproques.

Qu'appelle-t-on corps naturels ?

558. On appelle *corps naturels* toutes les substances matérielles dont l'assemblage compose l'univers.

Quel est le premier accident des corps qui se présente à nos sens ?

559. L'accident des corps qui se présente le premier à nos sens, quand nous les examinons, est *l'étendue*, c'est-à-dire une grandeur limitée d'une manière quelconque.

Combien l'étendue considérée en physique a-t-elle de dimensions ?

560. L'étendue considérée en physique, a toujours trois dimensions; savoir : *longueur*, *largeur* et *profondeur*. On ne peut imaginer un corps qui n'ait que l'une d'entr'elles.

La divisibilité de la matière a-t-elle des bornes ?

561. La matière est divisible à l'infini s'il s'agit d'une divisibilité purement idéale : car il est clair qu'une molécule quelconque peut toujours

se partager en deux par la pensée, quelque petite que soit cette molécule.

562. Un corps est divisé quand la liaison de ses parties est interrompue par une matière étrangère et qui n'est pas propre à s'unir avec elle. C'est ainsi qu'une lame de couteau sépare un morceau de bois en deux.

A quel caractère reconnaît-on qu'un corps est divisé ?

La partie la plus subtile du soufre qui se développe en brûlant et qui s'insinue de part et d'autre entre les parties du métal dilaté par le feu, forme dans l'intérieur de la pièce et selon son plan, une couche de matière étrangère au métal qui cause la division, et qu'on aperçoit quand les parties sont séparées.

La même cause qui désunit les corps liés les empêche aussi de se joindre, lors même qu'ils auraient pour cela toutes les dispositions requises.

C'est pour cette raison qu'on emploie les huiles et les graisses pour tenir séparées des matières dont on veut empêcher l'union ou le mélange; quelque chose d'humide pour prévenir l'adhérence de celles qui sont grasses; des poudres absorbantes quand il règne sur les surfaces une fluidité qui les ferait s'attacher.

Quelques exemples familiers éclairciront ceci.

563. On emploie le beurre à froid et par couches dans les pâtes qui doivent être feuilletées.

Dans les pâtes qui doivent être feuilletées, comment emploie-t-on le beurre ?

564. On enduit de quelque matière liquide l'intérieur des moules où l'on doit couler la cire, le soufre, etc.

De quoi enduit-on l'intérieur des moules où l'on doit couler la cire ? etc.

Sur quoi pose-t-on les vases nouvellement formés dans les manufactures de porcelaine ou de faïence ?

565. On pose sur du sable sec les vases nouvellement formés dans les manufactures de porcelaine ou de faïence.

C'est aussi pour cette raison que dans les arts, par exemple dans celui du peintre-vitrier, on a grand soin de bien nettoyer les surfaces sur lesquelles on veut peindre.

Que produit une couche d'eau interposée entre deux morceaux de cire ?

566. Une couche d'eau interposée entre deux morceaux de cire entretient ordinairement leur désunion, parce que l'eau n'étant point propre à pénétrer les corps gras, et ne s'y appliquant même qu'imparfaitement, son interposition ne peut leur servir de lien commun.

Il n'en est pas de même d'une colle qui peut pénétrer tant soit peu les pièces qu'elle doit attacher ensemble; c'est un corps fluide quand on l'emploie, et qui, par cette raison, se moule de part et d'autre dans les creux insensibles des surfaces; mais bientôt il devient solide, parce que son humidité l'abandonne et qu'il pénètre plus avant : alors les petits liens multipliés presqu'autant de fois qu'il y a de petits vides entre les parties solides des surfaces, font une adhérence très considérable.

C'est presque par le même principe que les soudures servent à lier les métaux : un mélange de plomb et d'étain, par exemple, mis en fusion par l'attouchement d'un fer chaud, pénètre les premières surfaces du métal dilaté par la même chaleur; un prompt refroidissement donne lieu à ses parties de se rapprocher. La soudure, qui perd en même temps sa fluidité, se trouve adhé-

rente de part et d'autre, sert de lien commun aux pièces, et les joint.

Divisibilité.

567. Le poids d'un grain d'or mis en feuilles peut couvrir une surface de cinquante pouces carrés.

Quelle surface peut couvrir le poids d'un grain d'or mis en feuilles?

568 La longueur d'un pouce contient au moins deux cents parties visibles, puisque sur des instrumens de mathématiques on le trouve quelquefois partagé par cent divisions, et qu'un observateur un peu attentif peut fort aisément tenir compte des moitiés.

Une feuille d'or d'un pouce carré pourra donc se couper en deux cents petites bandes plates, et chaque petite bande, en deux cents petits carrés; de sorte que toute la feuille ainsi divisée donnera 40 mille parties, qui est le produit de 200 multiplié par 200.

Mais dans un grain d'or battu on trouve 50 petites feuilles semblables à celles que nous venons de diviser; on doit donc multiplier encore 40000 par 50, ce qui donnera deux millions pour la somme des parties que l'on peut compter avec les yeux dans une parcelle de matière qui n'est que la 72e. partie d'un gros.

Ce nombre, quelque prodigieux qu'il soit, se trouve encore augmenté de moitié, quand on fait attention que chacune de ces particules d'or peut être vue et touchée au moins par deux surfaces, ou par les deux plans opposés dont les dimensions sont égales.

Ce que les feuilles d'or et d'argent nous apprennent de la ductibilité de ces deux métaux et de la divisibilité surprenante de leurs parties, est encore bien au-dessous de ce que l'on remarque chez les ouvriers qui préparent le fil d'argent doré dont on se sert pour fabriquer les étoffes, les galons, la broderie, etc.

Avec une quantité de feuilles d'or qui n'excède jamais le poids de six onces et qu'on diminue quelquefois presque jusqu'à une, on couvre un cylindre d'argent d'environ 22 pouces de longueur, 15 lignes de diamètre, et du poids de 45 marcs. On fait passer ce rouleau doré successivement par les trous d'une lame d'acier, qui vont en décroissant, de façon que s'allongeant aux dépens de son diamètre, il devient enfin aussi délié qu'un cheveu et d'une longueur qui égale presque 97 lieues de 2000 toises chacune.

Pendant cette opération, l'or s'étend sur le fil d'argent à proportion de son allongement, en sorte qu'on doit le considérer comme une enveloppe ou un fourreau dont les parties ne souffrent point d'interruption sensible.

Ce fil doré, que l'on nomme *trait*, passe ensuite entre deux rouleaux d'acier poli qui l'écrasent en forme de lame fort mince dont on enveloppe un fil de soie pour les usages des différens arts qui l'emploient; et dans l'opération des rouleaux, le trait s'allonge encore d'un 7e. Ainsi, au lieu de 97 lieues que nous avons comptées pour sa longueur, on en peut compter 111.

En supposant donc du fil le plus légèrement

doré, voilà une once d'or que l'on doit considérer sous la forme de deux petites lames dont chacune égale la longueur de 111 lieues, ou qui égalent ensemble 222 lieues.

Mais si l'on fait attention que le trait en s'écrasant sous les rouleaux prend la largeur d'environ 1/8e. de ligne et par conséquent les deux petites lames d'or qui revêtent l'argent de part et d'autre, on pourra partager encore leur largeur en deux parties (car une ligne se divise fort bien en 16 portions sensibles). Ainsi, au lieu de deux lames, il en faudra compter quatre, qui égaleront en longueur 444 lieues.

568. Il est encore d'autres matières que la nature a soumises à une divisibilité prodigieuse. Tout le monde sait qu'un grain de musc se fait sentir d'une manière incommode pendant vingt ans, dans un appartement où l'air se renouvelle tous les jours.

Pendant combien d'années un grain de musc se fait-il sentir ?

BAROMÈTRE.

569. C'est à Toricelli, disciple de Galilée, que l'on doit l'invention du baromètre. Cet instrument est devenu d'un usage si général, qu'il est connu jusque dans les plus petits hameaux.

A qui est due l'invention du baromètre ?

570. Le *baromètre simple* est celui dont l'orifice du tube plonge dans un vase qui contient du mercure.

A quel caractère reconnaît-on le baromètre simple ?

571. Pour construire un baromètre simple, on prend un tube de 30 à 36 pouces de long, très net et très sec. Pour que ce tube remplît les meilleures conditions possibles, il faudrait que

Comment construit-on un baromètre simple ?

dans les verreries on scellât les tubes par les deux extrémités, au moment où on les fabrique, ce qui les garantirait de tout corps étranger, et principalement de toute humidité.

Quelles qualités doit avoir le tube d'un baromètre?

572. Le tube doit être parfaitement uni, afin que la marche du mercure n'éprouve pas d'entraves. Plus le tube est net, plus il est agréable à l'œil et plus il favorise l'observation. On souffle dans le tube pour en chasser la poussière; et afin que l'humidité provenue de cette action disparaisse, on introduit dans le tube un peu de coton que l'on promène plusieurs fois en le lui faisant traverser, jusqu'à ce que l'on se soit assuré que le tube est bien sec.

Avec quoi convient-il de laver le tube d'un baromètre?

573. Il ne faut jamais laver le tube avec l'esprit-de-vin; l'eau est préférable.

Car le mercure se tient toujours plus bas dans un tube lavé à l'esprit-de-vin, et cet abaissement va même jusqu'à 18 lignes.

Amontons explique ce fait par une action dissolvante de l'esprit-de-vin exercée sur des corpuscules étrangers qui, par leur destruction, permettent à l'air de s'introduire le long du tube. Il remédiait effectivement à cet abaissement extraordinaire en faisant passer plusieurs fois du mercure dans le tube.

Lorsque le tube est bien sec, il doit être scellé à la lampe par l'une de ses extrémités. Cette soudure doit être renforcée convenablement pour résister au choc de la colonne de mercure.

Il faut mettre le plus grand soin à ce que le mercure soit extrêmement pur; car ce n'est que sur

la marche d'un fluide homogène que l'on peut établir des calculs certains.

Le mercure, dans son état de pureté, jouit d'un vif éclat; ses globules, parfaitement sphériques, coulent avec vivacité; pressés sous le doigt, ils fuient en se divisant, mais sans laisser de traînée après eux. On dit, au contraire, que le mercure *fait la queue* lorsqu'on lui voit cette espèce de prolongement; et dans ce dernier état il est certain qu'il est allié à quelque autre corps métallique. Il est indispensable alors de l'en séparer.

Tous les auteurs prescrivent de n'employer que du mercure revivifié du cinabre.

Ce minéral est composé de soufre et de mercure; la nature le fournit, et l'art sait l'imiter très bien. Les métaux qui s'y trouveraient unis au mercure y restent dans l'état d'oxide. Lorsqu'ils ont en outre été combinés avec le soufre, ils ne sont pas volatils, tandis que le mercure peut au contraire le devenir.

Purification du Mercure.

574. Pour purifier le mercure, on prend une partie de mercure et une autre de soufre d'un poids quatre fois aussi grand. On fait fondre le soufre dans un vase de fonte que l'on ferme hermétiquement avec un couvercle de terre, et préférablement de fer. Que fait-on pour purifier le mercure?

Le soufre étant fondu, on y introduit le mercure peu à peu; et comme l'extrême état de division favorise le mélange, on le fait tomber

19..

dans le soufre en le pressant au travers d'une peau de chamois.

On remue sans cesse avec une spatule de fer ; le tout forme une poudre noire. Ce mélange s'appelle *sulfure mercuriel*. Après avoir bien remué cette poudre, afin d'éviter que le mélange ne prenne en masse, et qu'elle s'est refroidie, on la triture dans un mortier de fonte, puis on la mêle avec moitié de son poids de limaille de fer, et on l'introduit ainsi dans une cornue de verre. Il convient que ce mélange soit fait bien exactement. Le tiers de la cornue doit rester vide ; on la place sur un bain de sable que l'on chauffe par degrés.

Le bec de la cornue doit être incliné ; il entre dans un ballon plein d'eau, en sorte qu'il touche presque la surface du fluide, mais sans y plonger.

On procède alors à la distillation en chauffant par degrés. Le mercure se volatilise, passe en vapeurs dans le ballon où elles se condensent et viennent se réunir sous l'eau, où elles donnent un mercure très purifié et seul propre aux expériences délicates et aux instrumens destinés aux recherches.

On ne saurait exiger du baromètre qu'il prédise le temps avec la même précision qu'un cadran solaire ou qu'une horloge marquent les heures, puisque cet instrument n'est qu'une simple balance destinée à faire connaître le poids de l'atmosphère, et que l'augmentation ou la diminution de ce poids sont bien loin de coïn-

cider toujours avec le beau ou le mauvais temps.

575. Un baromètre, pour être régulier, doit être fait avec un tube d'un diamètre bien égal, et de mercure bien purgé d'air.

Pour qu'un baromètre soit régulier quelles conditions doit-il remplir ?

Le diamètre du tube doit être au moins d'une ligne et demie, mais il vaut mieux qu'il en ait deux et même jusqu'à trois.

576. On reconnaît que la colonne de mercure est bien purgée d'air, lorsqu'après avoir soulevé et incliné l'instrument, le mercure frappe un coup sec au sommet du tube, et qu'en outre il offre à l'intérieur du tube une surface aussi brillante que celle d'un miroir bien étamé. En ne perdant pas de vue cette observation, on se garantit d'être la dupe de ces marchands qui courent les campagnes avec des instrumens la plupart fautifs, ou construits sans aucune des attentions qui en assurent la justesse et la régularité.

A quoi reconnaît on que la colonne de mercure du baromètre est bien purgée d'air ?

577. Pour en faire usage, il faut fixer le baromètre contre un mur bien d'aplomb, et dans une situation parfaitement verticale ou perpendiculaire à l'horizon.

Comment fait on usage du baromètre ?

578. Il faut encore l'exposer dans un endroit dont la température soit à très peu près égale à celle de l'atmosphère, afin d'éviter la différence que produirait la dilatation sur la longueur de la colonne de mercure.

Dans quel endroit un baromètre doit-il être préférablement exposé ?

579. Enfin, pour le consulter avec avantage, le premier soin doit être de déterminer le terme moyen des variations ordinaires du mercure par des observations suivies au moins pendant tout

Pour consulter un baromètre avec avantage, quel doit être le premier soin ?

le cours d'une année, et sauf à rectifier successivement ce premier résultat au moyen des observations des années subséquentes. Mais, quoiqu'il faille être très réservé dans les conclusions que l'on tire des variations du baromètre pour augurer le beau et le mauvais temps, il est bien cependant que les propriétaires ruraux et les agriculteurs soient munis de cet instrument, et qu'en le consultant ils s'aident en même temps des pronostics tirés de l'état du ciel, de quelques habitudes des animaux, etc., afin d'en déduire des notions utiles pour l'entreprise de quelques travaux importans de culture.

THERMOMÈTRE.

A qui attribue-t-on l'invention du thermomètre?

580. La connaissance du thermomètre a précédé de quelques années celle du baromètre. On en attribue l'invention à Drebel, et on la fait remonter vers l'année 1620.

Combien y a-t-il de classes distinctes de thermomètres?

581. Il n'y a que deux classes bien distinctes de thermomètres : celle de thermomètres à air, et celle dans laquelle on emploie tout autre fluide que l'air.

Quels sont les fluides qui ont été mis en usage pour les thermomètres?

582. Les fluides qui, en outre de l'air, ont été mis en usage pour les thermomètres, sont l'esprit-de-vin, le mercure et les huiles, soit grasses, soit essentielles, enfin les solutions de sel dans l'eau.

A quel emploi est appliqué le thermomètre à air?

583. Le thermomètre à air n'est plus employé que pour les recherches scientifiques.

584. Il consiste en un tube recourbé, semblable à celui du baromètre à siphon. Ici la petite branche est terminée par une boule qui contient un volume d'air : la portion inférieure est remplie par du mercure qui remonte dans la grande branche à près de moitié de sa hauteur. L'air qui s'échauffe et se dilate dans la boule repousse le mercure dans l'autre branche. S'il est au contraire refroidi, comme il occupe alors un moindre volume, le mercure redescend.

En quoi consiste le thermomètre à air?

585. Le thermomètre de Drebel consistait dans un tube terminé à sa partie supérieure par une boule; l'autre extrémité plongeait dans un vase plein d'une liqueur colorée. En chauffant la boule, l'air dilaté sortait en bulles par l'orifice plongé dans le vase, et se trouvait remplacé par un volume de liqueur correspondant. Une division placée à côté du tube indiquait la marche suivie par la liqueur en plus ou en moins d'élévation. C'est l'enfance de la découverte. Les académiciens de Florence l'améliorèrent considérablement. Entre leurs mains le thermomètre devint un tube scellé hermétiquement par le haut, et terminé en boule par le bas. Ils le remplirent en partie avec l'esprit-de-vin coloré, et une échelle divisée en cent degrés fut placée à côté du tube. Chacun pouvait déterminer journellement la marche de son thermomètre, mais il était impossible d'établir des points de comparaison, en sorte que des observateurs éloignés les uns des autres pussent s'entendre réciproquement. Ils ne pouvaient reconnaître à quel degré

En quoi consistait le thermomètre de Drebel?

de chaleur identique leurs thermomètres s'étaient élevés, puisque nul de ces instrumens n'avait la même marche : ils manquaient tous d'un point fixe de départ.

Newton sentit que, pour rendre cet instrument aussi utile qu'il le pourrait être, il était indispensable de donner plusieurs points fixes à sa division.

Avec quel fluide Newton construisit-il un thermomètre, et que prit-il pour premier point?

586. Il construisit un thermomètre avec de l'huile de lin, et prit pour premier point *la neige fondante*.

Il supposa que ce volume de la liqueur qui, dans le tube, marquait ce point, était de dix mille parties, et ce premier point devint son zéro.

Le second point déterminé par lui fut celui de la chaleur du corps humain, avec l'augmentation de ce volume ; il le marqua douze degrés.

Enfin, il détermina deux autres points, celui de l'*eau très bouillante*, et celui de l'*étain se refroidissant*. Le premier devint le degré 34e., le dernier fut le 72e. ; c'est en établissant une proportion qu'il fixa les termes de ces degrés.

Après Newton, ce fut l'esprit-de-vin et enfin le mercure que l'on employa le plus généralement pour remplir les tubes.

Il y avait plus de cent ans que cet instrument était connu lorsque Fahrenheit, en 1724, se servit du mercure.

Presque à la même époque, le célèbre de Réaumur s'occupait en France à découvrir une formule certaine pour donner au thermomètre

une marche comparable et des principes assurés de construction; mais il employa l'esprit-de-vin.

Construction du Thermomètre.

587. La forme du thermomètre est un tube de verre d'un très petit diamètre.

Quelle est la forme du thermomètre?

588. Ceux que l'on nomme tubes capillaires, ayant environ un quart de ligne de diamètre intérieur, sont ceux que l'on doit préférer; ils exigent des boules moins grosses.

Quels sont les tubes que l'on doit préférer pour les thermomètres?

La nécessité d'avoir un tube d'un calibre parfaitement uniforme se fait sentir ici impérieusement. Il faut mesurer la marche d'une colonne très déliée, avec des degrés très rapprochés. Le moindre changement dans la capacité intérieure du tube altérera l'indication en plus ou en moins.

589. L'opération par laquelle on calibre un tube est extraordinairement minutieuse. On introduit un pouce de mercure dans le tube avec un petit entonnoir de verre. La mesure étant prise au compas, et le bout de la colonne marqué sur le tube avec une liqueur colorée, ou un fil de soie gommé, on fait couler le mercure un pouce plus loin; alors une nouvelle marque est faite. Ce procédé, aussi long qu'indispensable, se continue dans toute la portée du tube.

Comment procède-t-on pour calibrer un tube de thermomètre?

Si l'on se trouve arrivé dans un endroit où le calibre varie, il faut y couper le tube et conserver à part la portion calibrée. Le surplus sera employé à d'autres usages, à moins qu'il ne se

trouve être lui-même d'un calibre égal partout, et avoir seulement cessé d'être en rapport avec la portion précédente du tube.

Lorsque l'on veut se procurer un tube calibré avec une précision encore plus rigoureuse, on fait écouler un peu moins de moitié de mercure, il en reste un cylindre de plus d'un demi-pouce; on le fait passer dans l'autre demi-pouce, qu'il doit excéder de la même quantité dont il excédait dans le premier. La même chose est répétée dans chaque pouce, qui se trouve par ce moyen calibré sur une très petite dimension. M. Gay-Lussac est l'auteur de cette méthode.

Quand le tube d'un thermomètre est calibré, que doit-on faire?

De quelle longueur convient-il que soit le tube d'un thermomètre pour les usages ordinaires?

590. Une fois le tube calibré, il faut déterminer la longueur à donner à l'instrument; neuf à dix pouces suffisent pour les usages ordinaires. Plus court, il ne remplirait pas toutes les indications jusqu'à l'eau bouillante, et même un peu au-dessus, ou bien les degrés deviendraient trop petits.

Dans cette dimension, il est possible de donner une ligne aux quatre-vingts divisions au-dessus de zéro, et d'en tracer vingt-quatre au-dessous.

L'échelle centigrade sera de même assez distincte, puisqu'elle aura en totalité seulement vingt-six divisions de plus que l'échelle de Réaumur.

A l'une des extrémités du tube choisi, on souffle à la lampe une boule ou une spirale: quelle que soit la forme préférée, elle doit être en rapport avec la longueur du tube. Une boule

est plus aisée à mettre dans une proportion exacte. L'artiste habitué à ce procédé n'a point recours à des moyens rigoureux pour déterminer les proportions ; le coup-d'œil lui suffit.

591. M. Deluc, qui a porté la même exactitude dans toutes les parties de la méthode à suivre, détermine le diamètre de la boule à trente-deux fois le diamètre du tube.

A combien M. Deluc détermine-t-il le diamètre de la boule du tube d'un thermomètre ?

Ainsi, un tube capillaire d'un quart de ligne de diamètre doit supporter une boule de huit lignes de diamètre.

De quel diamètre doit être la boule que doit supporter dans un thermomètre un tube capillaire d'un quart de ligne de diamètre ?

On présente la boule dans un calibre qui peut être fait avec une feuille de cuivre laminé ; il faut tenir compte de l'épaisseur du verre de la boule : quelques essais feront acquérir toute la précision nécessaire.

L'opération qui suit immédiatement consiste à remplir le tube du fluide qu'il doit contenir, par exemple de mercure.

Les tubes doivent être nets et secs.

En soufflant la boule, il y est entré de l'humidité ; ils doivent en être purgés, ainsi que de l'air. Afin d'y parvenir, on fait chauffer fortement le tube dans toute sa longueur. La boule seule n'est pas exposée au feu ; mais lorsque la chaleur acquise par le tube a dû le sécher complètement, on présente la boule au feu, on l'y chauffe brusquement. L'eau qu'elle contient en est chassée et entraîne dans sa sortie rapide les petits corpuscules qui pourraient se rencontrer dans son passage le long du tube.

Avant de faire cette opération, on a soin

de souder un petit goulot ou réservoir à l'extrémité du tube, opposée à celle où l'on a placé la boule.

On forme autour de ce petit goulot un entonnoir en papier, qui s'attache avec un fil ou un peu de cire à cacheter.

La boule étant toujours sur le feu, on remplit de mercure le réservoir, puis on éloigne le tout du feu. L'air se condensant dans la boule laisse entrer le mercure; celui-ci en gagne le fond.

Cette opération doit être répétée plusieurs fois jusqu'à ce que l'on ait à-peu-près rempli la boule.

CHIMIE.

592. La chimie est une science qui nous apprend à connaître l'action intime des corps. Qu'est-ce que la chimie ?

593. On appelle *molécules des corps* les parties matérielles, soit simples, soit composées, qui échappent aux poids et aux mesures. Qu'appelle-t-on molécules des corps ?

594. L'objet de la chimie est de décomposer et composer les corps pour déterminer les élémens qui entrent dans leur composition. Quel est l'objet de la chimie ?

595. L'affinité est la propriété des corps en vertu de laquelle les molécules tendent à s'unir. Qu'est-ce que l'affinité ?

596. La cohésion est la propriété des corps en vertu de laquelle les molécules restent unies. Qu'entend-on par cohésion ?

597. La saturation est la limite de l'action chimique d'un corps sur un autre dans des circonstances données. Qu'est-ce que la saturation ?

598. La neutralisation est le terme où les propriétés antagonistes d'une substance sont déguisées par celles d'une autre substance, et se trouvent dans un état d'équilibre qui ne permet plus aux caractères de l'une et de l'autre de se manifester. Qu'est-ce que la neutralisation ?

599. Le calorique est un fluide répandu dans toute la nature, et qui se manifeste par la sensation qu'il nous fait éprouver, et que nous appelons *chaleur*. Définition du calorique.

600. Les molécules du calorique se meuvent dans tous les sens à la manière de la lumière. Comment se meuvent les molécules du calorique ?

601. Ce fluide est extrêmement subtil, invisible, éminemment élastique, impondérable.

Le calorique tend à se distribuer également dans tous les corps; il les pénètre plus ou moins facilement, les dilate, les décompose, les fait passer de l'état solide à l'état liquide, de l'état liquide à l'état gazeux, lesquels, lorsqu'il s'en sépare, passent de l'état gazeux à l'état liquide, et de celui-ci à l'état solide.

Le calorique a encore la propriété de se combiner en différentes proportions avec chacun des corps, pour les élever à la même température: il faut entendre par-là que pour que deux corps soient également chauds, l'un d'eux doit contenir une plus grande quantité de calorique que l'autre.

Quelle comparaison peut-on établir entre le calorique et la force de cohésion?

602. Le calorique et la force de cohésion sont deux forces opposées : elles sont inverses l'une de l'autre. Il faut distinguer le calorique de la chaleur comme la cause de l'effet.

603. Le calorique frappe et pénètre les corps sous forme de rayon, ou s'y introduit par le contact.

Quelles sont les propriétés du calorique rayonnant?

604. Le calorique rayonnant est d'une très grande vélocité. Il se dirige en ligne droite, traverse l'air et les fluides élastiques sans les échauffer. Il est susceptible de réflexion et de réfraction.

Le calorique rayonnant traverse-t-il le verre comme la lumière?

605. Le calorique rayonnant diffère de la lumière. Il ne traverse pas le verre comme la lumière. Il est à peine réfléchi par des corps qui réfléchissent fortement la lumière.

606. La température est l'expression des énergies diverses du calorique. Qu'est-ce que la température?

607. La conductibilité est la propriété des corps de recevoir et d'abandonner le calorique plus ou moins promptement. Définition de la conductibilité.

Les corps solides sont les meilleurs conducteurs. Les liquides le sont très peu, et les fluides élastiques encore moins. Quels corps sont les meilleurs conducteurs?

Un corps, au moment où il change d'état, cesse d'être conducteur. Un corps est-il encore conducteur au moment où il change d'état.

608. Le calorique spécifique est la quantité de calorique respectivement nécessaire pour élever au même degré de température des corps de nature différente, ou dans des états différens. Qu'est ce que le calorique spécifique?

609. Le calorique spécifique s'évalue en mêlant un corps, pris pour terme de comparaison (par exemple l'eau), dont la température soit plus élevée, successivement avec différens corps, dont la température soit plus basse; la température du mélange indique le calorique spécifique. Comment s'évalue le calorique spécifique?

Le calorique spécifique s'évalue aussi par le calorimètre de Lavoisier. La quantité de glace fondue par un corps élevé à 75 degrés de température est l'expression de son calorique spécifique.

610. Les sources du calorique sont le soleil, la combustion, la percussion, le frottement, des combinaisons, des décompositions, l'électricité. Quelles sont les sources du calorique?

611. L'électricité est une propriété des corps due à une cause quelconque à laquelle on a donné le nom de *fluide électrique*. Définition de l'électricité.

Que produit l'électricité ?

En vertu de cette propriété, les corps, placés dans certains états, dans certaines circonstances, attirent ou repoussent des substances légères qu'on leur présente, lancent des étincelles et des aigrettes lumineuses, enflamment les matières combustibles, excitent de fortes commotions, et produisent des décompositions.

A quoi donne lieu le fluide galvanique ?

612. Le fluide galvanique donne lieu à l'électricité galvanique ou voltaïque.

De quels fluides suppose-t-on qu'est composé le fluide galvanique ?

613. On suppose le fluide galvanique composé de deux fluides différens, l'un positif, l'autre négatif. Ils sont insensibles lorsqu'ils sont combinés; mais si l'un ou l'autre se trouve dans un corps, ou à sa surface, celui-ci repousse tous les corps électrisés de la même manière, et attire ceux qui sont inversement électrisés.

Comment désigne-t-on l'appareil galvanique ?

614. L'appareil galvanique est nommé *pile de Volta.*

De quoi se compose la pile de Volta ?

Cette pile est composée de plaques de cuivre et de zinc, placées verticalement ou horizontalement, deux à deux, l'une accolée à l'autre, et toujours dans le même sens, de manière qu'entre chaque couple il se trouve un conducteur humide ou liquide.

L'appareil, ainsi construit, est terminé d'un côté par une plaque de cuivre, et là est le *pôle négatif;* de l'autre par une plaque de zinc, et là est le *pôle positif.*

Comment met-on en action l'appareil voltaïque ?

615. Pour mettre en action l'appareil voltaïque, on attache un fil d'or ou de platine à chaque pôle; on les met en contact avec le corps isolé, sur lequel on veut faire agir le fluide gal-

vanique, de manière que les extrémités de ces conducteurs métalliques soient peu éloignées l'une de l'autre, si le corps est solide ; mais s'il est liquide ou dissous dans l'eau, ce rapprochement n'est point nécessaire.

616. L'effet le plus simple produit par le fluide galvanique est la combustion du charbon, l'ignition et la fusion des métaux. Quel est l'effet le plu simple produit par l fluide galvanique ?

617. L'oxigène est un des cinquante et un corps simples. De quelle nature es l'oxigène ?

Il ne s'obtient pur qu'à l'état de gaz. Dans quel état l'oxi gène s'obtient-il pur ?

618. L'oxigène est sans odeur, sans couleur et sans saveur.

La pesanteur de l'oxigène est à celle de l'air : : 1,1025 : 1. Quel est le rapport d la pesanteur de l'oxigèn à celle de l'air?

619. L'oxigène, soumis à une pression forte et subite, s'échauffe et devient lumineux. Que se passe-t-il dan l'oxigène lorsqu'il es soumis à une pressioi forte et subite ?

620. L'oxigène se combine avec tous les corps simples, tantôt avec dégagement de calorique et de lumière, tantôt avec dégagement de calorique seulement. Avec quels corps s combine l'oxigène ?

621. L'oxigène fut découvert en 1774 par Priestley et Scheele. A quelle époque et pa qui fut découvert l'oxigène ?

622. La combustion est le résultat de la combinaison de l'oxigène avec un corps simple. Qu'est-ce que la combustion ?

623. L'hydrogène fut connu dès le commencement du dix-septième siècle. Ce mot est grec, et signifie *générateur de l'eau*. A quelle époque fut connu l'hydrogène, et que signifie ce mot ?

624. La pesanteur de l'hydrogène pur est à celle de l'eau : : 0,0688 : 1. Quel est le rapport de la pesanteur de l'hydrogène pur à celle de l'eau ?

TABLE ANALYTIQUE

DU TROISIÈME VOLUME

PAR ORDRE DE MATIÈRES.

20..

DES PLANS, DES POLYHÈDRES ET DES CORPS RONDS.

MÉCANIQUE.

DES CENTRES DE PERCUSSION, D'OSCILLATION ET DE MOUVEMENT CIRCULAIRE.

HYDROSTATIQUE.

FIN DE LA TABLE ANALYTIQUE.

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LES TROIS VOLUMES,

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

A.

D

E



Q

U

V

Z

FIN DU TROISIÈME ET DERNIER VOLUME.

